ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOLUME SESSANTADUESIMO
1926-1927

TORINO
Libreria FRATELLI BOCCA
Via Carlo Alberto, 3.
1927

PRESIDENTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO

dalla sua fondazione

ELEZIONE	PRESIDENTI PERPETUI (*)
1783, 25 luglio	**Saluzzo di Monesiglio** (conte Giuseppe Angelo). Offrì le dimissioni dalla carica e furono accettate (7 settembre 1788) conferendogli il titolo di *Presidente emerito*.
" "	**La Grange Tournier** (Giuseppe Luigi), *Onorario*.
1788, 30 novembre	**Morozzo di Bianzé** (conte Carlo Lodovico).
1801, 24 gennaio (4 piovoso a. IX)	**Saluzzo** (cittad. Angelo Giuseppe) ex-conte di Monesiglio.
1801, 15 febbraio	Col Regolamento del 26 piovoso anno IX (15 febbr. 1801) essendosi stabilito che l'Accademia Nazionale rinnovata col *Decreto della Commissione esecutiva del Piemonte* del 22 nevoso anno IX (17 gennaio 1801) non avesse più che due presidenti di classe, cessarono queste funzioni del Saluzzo.
1804, 25 febbraio (5 ventoso a. XII)	**Bonaparte** (Napoleone) primo console della Repubblica Francese, *Onorario*.
1815, 25 novembre	**Balbo di Vinadio** (conte Prospero).
1837, 26 "	**Lascaris di Ventimiglia** (marchese Agostino).
1838, 18 "	**Saluzzo di Monesiglio** (conte Alessandro).
1851, 18 dicembre	**Plana** (barone Giovanni).
1864, 1° maggio	**Sclopis di Salerano** (conte Federigo).

(*) Dal volume *Il primo secolo della R. Accademia delle Scienze di Torino. Notizie storiche e bibliografiche (1783-1883)*. Torino, 1883, pag. 141.

ELEZIONE	PRESIDENTI TRIENNALI (*)
1879, 9 marzo	**Ricotti** (Ercole).
1882, 12 febbraio	**Ricotti** (Ercole) rieletto.
1883, 6 maggio	**Fabretti** (Ariodante).
1885, 12 aprile	**Genocchi** (Angelo).
1888, 8 „	**Genocchi** (Angelo) rieletto.
1889, 28 „	**Lessona** (Michele) termina il 2° triennio iniziato dal Genocchi.
1891, 24 maggio	**Lessona** (Michele).
1894, 24 giugno	**Lessona** (Michele) rieletto, † 20 luglio 1894.
1895, 13 gennaio	**Carle** (Giuseppe).
1898, 9 „	**Carle** (Giuseppe) rieletto.
1901, 13 „	**Cossa** (Alfonso) † 23 ottobre 1902.
1902, 14 dicembre	**D'Ovidio** (Enrico) termina il triennio iniziato dal Cossa.
1904, 21 febbraio	**D'Ovidio** (Enrico).
1907, 17 marzo	**D'Ovidio** (Enrico) rieletto.
1910, 24 aprile	**Boselli** (Paolo).
1913, 18 maggio	**Boselli** (Paolo) rieletto.
1916, 28 „	**Camerano** (Lorenzo) † 22 novembre 1917.
1918, 3 febbraio	**Naccari** (Andrea) continua il triennio iniziato dal Camerano.
1919, 27 aprile	**Naccari** (Andrea).
1922, 7 maggio	**Ruffini** (Francesco).
1925, 3 „	**Ruffini** (Francesco) rieletto.

(*) A norma dell'art. 3 dello *Statuto della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, approvato con R. Decreto 2 febbraio 1882, il Presidente dura in carica un triennio e può essere rieletto per un altro triennio.

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI STRANIERI E CORRISPONDENTI

AL 31 DICEMBRE 1926

NB. — *Negli elenchi degli Accademici la prima data è quella dell'elezione, la seconda quella del R. Decreto che approva l'elezione.*

PRESIDENTE

Ruffini (Francesco), Senatore del Regno, Professore stabile di diritto ecclesiastico nella R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Grand' Uff. ✠ e ⚭. — *Torino, Via Principe Amedeo, 22.*

Rieletto alla carica il 3 maggio 1925 per il triennio dal 20 aprile 1925 al 19 aprile 1928 (R. D. 2 luglio 1925).

VICE-PRESIDENTE

Parona (Nob. Carlo Fabrizio), Professore stabile di Geologia nella R. Università di Torino, già Rettore della R. Università. Comm. ✠ e ⚭.

Rieletto alla carica il 3 maggio 1925 per il triennio dal 20 aprile 1925 al 19 aprile 1928 (R. D. 2 luglio 1925).

TESORIERE

Panetti (Modesto), Professore stabile di meccanica applicata alle macchine e di Costruzioni Aeronautiche nel R. Politecnico di Torino, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Comm. ✠ e ⚭. — *Corso Peschiera, 30.*

Eletto alla carica il 15 novembre 1925 per il triennio dal 1° luglio 1925 al 30 giugno 1928 (R. D. 13 dicembre 1925).

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Direttore

Somigliana (nob. Carlo), Professore stabile di Fisica matematica nella R. Università di Torino, Preside della Facoltà di Scienze, ✱ e Comm. ✠. — *Corso Vinzaglio, 75.*
Rieletto alla carica il 15 novembre 1925 per il triennio dall'11 giugno 1925 al 10 giugno 1928 (R. D. 13 dicembre 1925).

Segretario

Mattirolo (Oreste), Professore stabile di Botanica nella R. Università di Torino, ✱ e Gr. Uff. ✠, Uff. del Merito agricolo di Francia. — *Torino, Orto Botanico (al Valentino).*
Rieletto alla carica il 15 novembre 1925 per il triennio dall'11 giugno 1925 al 10 giugno 1928 (R. D. 13 dicembre 1925).

ACCADEMICI RESIDENTI

D'Ovidio (Enrico), Senatore del Regno, Professore emerito di Algebra e Geometria analitica nella R. Università di Torino, Gr. Uff. ✱ e ✠. — *Torino, Corso Peschiera, 30.*
29 dicembre 1878 - 16 gennaio 1879. — Pensionato 28 novembre 1889.

Peano (Giuseppe), Professore stabile di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino, ✱ e Comm. ✠. — *Torino, Via Barbaroux, 4.*
25 gennaio 1891 - 5 febbraio 1891. — Pensionato 22 giugno 1899.

Guidi (Camillo), Professore stabile di Statica grafica e Scienza delle costruzioni, Uff. ✱, Gr. Uff. ✠. — *Torino, Corso Valentino, 7.*
31 maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 11 giugno 1903.

Parona (Nob. Carlo Fabrizio), *predetto.*
15 gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 21 gennaio 1909.

Mattirolo (Oreste), *predetto.*
10 marzo 1901 - 16 marzo 1901. — Pensionato 15 dicembre 1910.

Grassi (Guido), Professore emerito di Elettrotecnica nella R. Scuola d'ingegneria di Torino, Uff. ✠, Comm. ♔. — *Torino, Via Ettore De Sonnaz, 7.*
9 febbraio 1902 - 23 febbraio 1902. — Pensionato 30 novembre 1911.

Somigliana (nob. Carlo), *predetto.*
5 marzo 1905 - 27 aprile 1905. — Pensionato 20 luglio 1913.

Panetti (Modesto), *predetto.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915. — Pensionato 27 aprile 1919.

Ponzio (Giacomo), Professore stabile di chimica generale nella R. Università di Torino, ♔. — *Torino, Corso Massimo d'Azeglio, 48.*
10 marzo 1918 - 21 marzo 1918. — Pensionato 28 ottobre 1923.

Sacco (Federico), Prof. stabile di Geologia applicata nella R. Scuola d'Ingegneria e Prof. di Paleontologia nella R. Università di Torino, Gr. Uff. ♔. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele II, 18.*
10 marzo 1918 - 21 marzo 1918. — Pensionato 19 maggio 1924.

Majorana (Quirino), Professore stabile di Fisica sperimentale nella R. Università di Bologna, Comm. ✠ e ♔. — *Bologna, Via Irnerio, 46.*
10 marzo 1918 - 21 marzo 1918. — Pensionato 1° marzo 1925.

Herlitzka (Amedeo), Professore stabile di Fisiologia nella R. Università di Torino, ♔. — *Torino, Via Pietro Toselli, 1.*
25 gennaio 1920 - 19 febbraio 1920.

Pochettino (Alfredo), Professore stabile di Fisica sperimentale e Rettore della R. Università di Torino, ✠ e ♔. — *Torino, Via Giuria, 1.*
25 gennaio 1920 - 19 febbraio 1920.

Boggio (Tommaso), Prof. stabile di Meccanica superiore nella R. Università di Torino, ✠, Comm. ♔, Lauréat de l'Académie des sciences de Paris. — *Torino, Via Ottavio Revel, 5.*
17 febbraio 1924 - 13 marzo 1924.

Garelli (Felice), Prof. di chimica tecnologica e Direttore della R. Scuola d'ingegneria di Torino, Comm. ♔. — *Torino, Corso Duca di Genova, 1.*
17 febbraio 1924 - 13 marzo 1924.

Pierantoni (Umberto), Professore stabile di Anatomia e fisiologia comparate nella R. Università di Napoli. — *Napoli, Galleria Umberto I, 27.*
17 febbraio 1924 - 13 marzo 1924.

Repossi (Emilio), Professore stabile di Mineralogia nella R. Università di Torino. — *Torino, Via Cibrario, 61.*
22 marzo 1925 - 7 maggio 1925.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Volterra (Vito), Senatore del Regno, Professore stabile di Fisica matematica nella R. Univ. di Roma, ✠, ✱, Gr. Cord. ⬬, Croce di Guerra. — *Roma, Via in Lucina, 17.*
3 febbraio 1895 - 17 febbraio 1895.

Bianchi (Luigi), Professore stabile di Geometria analitica nella R. Università di Pisa, ✠, ✱, ⬬. — *Pisa, Via Manzoni, 3.*
13 febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Bertini (Eugenio), Professore emerito della R. Università di Pisa, Uff. ✱, Comm. ⬬. — *Pisa, Lungarno Mediceo, 7.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

Pirotta (Pietro Romualdo), Professore stabile di fisiologia vegetale nella Università di Roma, ✠, Gr. Uff. ⬬. — *Roma (3), Via Milano, 75, Istituto Botanico.*
24 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915.

Rosa (Daniele), Professore stabile di Zoologia ed anatomia comparata nella R. Università di Modena, ⬬. — *Modena, R. Università.*
25 gennaio 1920 - 19 febbraio 1920.

Zambonini (Ferruccio), Professore stabile di chimica generale nella R. Università di Napoli. — *Napoli, Via Mezzocannone A.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922

Levi-Civita (Tullio), Professore stabile di meccanica razionale nella R. Università di Roma, ✠. — *Roma, Via Sardegna, 50.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Cantone (Michele), Professore stabile di fisica sperimentale nella R. Università di Napoli, ✠, Comm. ⬬. — *Napoli, Via Duomo, 305.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

ACCADEMICI STRANIERI

Thomson (John Joseph), Professore nella Università di Cambridge. — 15 maggio 1910 - 12 giugno 1910.

Rutherford (Sir Ernesto), Professore di fisica sperimentale nell'Università di Cambridge.
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Hale (Giorgio), Astronomo. — *Pasadena, Mount Wilson Observatory (California).*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Picard (Emilio), Segretario perpetuo per le scienze matematiche dell'Accademia delle Scienze di Parigi. — *Parigi (6), Quai Conti, 25.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Michelson (Alberto), Professore di fisica nell'Università di Chicago. — *Chicago, Kimbark Avenue, 5756.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

Lorentz (Enrico), Professore di fisica teoretica nell'Università di Leida. — *Harlem, Juliana straat, 49.*
5 marzo 1922 - 30 marzo 1922.

CORRISPONDENTI

Sezione di Matematiche pure.

Mittag-Leffler (Gustavo), Professore all'Università di Stoccolma. — 12 gennaio 1896.
Castelnuovo (Guido), Prof. nella R. Università di Roma. — 17 aprile 1898.
Hilbert (Davide), Prof. nell'Università di Göttingen. — 14 giugno 1903.
Enriques (Federico), Prof. nell'Università di Bologna. — 15 maggio 1910.
Berzolari (Luigi), Professore nella R. Università di Pavia. — 24 febbr. 1918.
Marcolongo (Roberto), Professore nella R. Università di Napoli. — Id. id.
Pincherle (Salvatore), Professore nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Severi (Francesco), Professore nella R. Università di Roma. — Id. id.
Appell (Paul Emile), Professore di meccanica analitica alla Sorbona, Parigi. — 11 giugno 1922.
Borel (Emile), Professore di calcolo delle probabilità e di fisica matematica, Parigi. — Id. id.
Loria (Gino), Professore di geometria superiore nella R. Università di Genova. — Id. id.
Study (Eduard), Professore di matematiche nell'Università di Bonn. — Id. id.

Sezione di Matematiche applicate, Astronomia e Scienza dell'ingegnere civile e militare.

Ewing (Giovanni Alfredo), Professore nell'Università di Edinburg. — 27 maggio 1894.
Cerulli (Vincenzo), Direttore dell'Osservatorio Collurania, Teramo. — 15 maggio 1910.
Boussinesq (Valentino), Membro dell'Istituto di Francia, Professore nella Università di Parigi. — Id. id.
Albenga (Giuseppe), Professore nella R. Università di Bologna. — 24 febbraio 1918.
Colonnetti (Gustavo), Professore nel R. Politecnico di Torino, — Id. id.
Maggi (Gian Antonio), Professore nella R. Università di Milano. — Id. id.

Mesnager (Agostino), Professore nella Scuola Nazionale dei Ponti e Strade, Membro dell'Istituto di Francia, Parigi. — 29 dicembre 1918.

Fantoli (Gaudenzio), Professore di idraulica nel R. Istituto tecnico superiore di Milano. — 11 giugno 1922.

Planck (Max), Professore di fisica matematica nell'Università di Berlino. — Id. id.

Prandtl (Ludwig), Professore di meccanica applicata nell'Università di Gottinga. — Id. id.

Sezione di Fisica generale e sperimentale.

Garbasso (Antonio), Professore nella R. Università di Firenze. — 15 maggio 1910.

Zeeman (P.), Professore nell'Università di Amsterdam. — Id. id.

Corbino (Orso Mario), Professore nella R. Università di Roma. — 24 febbraio 1918.

Lombardi (Luigi), Professore nel R. Politecnico di Roma. — Id. id.

Marconi (Guglielmo), Senatore del Regno, Dottore in scienze, Londra. — Id. id.

Palazzo (Luigi), Direttore del R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica, Roma. — Id. id.

Rizzo (Giovanni Batt.), Professore di fisica terrestre nella R. Università di Messina. — 11 giugno 1922.

Bragg (W. H.), Professore di fisica nel Collegio Universitario di Londra. — Id. id.

Perrin (Jean), Professore di chimica-fisica alla Sorbona, Parigi. — Id. id.

Laue (Max von), Professore di fisica teoretica nell'Università di Berlino. — Id. id.

Amerio (Alessandro), Professore di fisica sperimentale nella R. Università di Messina. — Id. id.

Sezione di Chimica generale ed applicata.

Paternò (Emanuele), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 2 gennaio 1881.

Ostwald (Dr. Guglielmo), Gross Bothen (Sachsen). — 5 marzo 1905.

Arrhenius (Svante Augusto), Professore e Direttore dell'Istituto Fisico dell'Università di Stoccolma. — Id. id.

Nernst (Walter), Professore nell'Università di Berlino. — Id. id.

Angeli (Angelo), Professore nella R. Università di Firenze. — 24 febbraio 1918.

Le Chatelier (Enrico Luigi), dell'Istituto di Francia, Parigi. — Id. id.

Nasini (Raffaele), Professore nella R. Università di Pisa. — 24 febb. 1918.
Piutti (Arnaldo), Professore nella R. Università di Napoli. — Id. id.
Bruni (Giuseppe), R. Politecnico di Milano. — 15 giugno 1919.

Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia.

Tschermak (Gustavo), Professore nell'Università di Vienna. — 8 febbraio 1885.
Groth (Paolo Enrico), Professore nell'Università di Monaco. — 13 febbraio 1898.
Goldschmidt (Viktor), Professore nell'Univ. di Heidelberg. — 5 marzo 1905.
Suess (Franc. Edoardo), Professore nella "Deutsche Technische Hochschule" di Praga. — Id. id.
Haug (Emilio), Professore nell'Università di Parigi. — Id. id.
Lacroix (Alfredo), Membro dell'Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — 15 maggio 1910.
Artini (Ettore), Professore e Direttore del Museo Civico di Storia Naturale di Milano. — 24 febbraio 1918.
Brugnatelli (Luigi), Professore nella R. Università di Pavia. — Id. id.
Dal Piaz (Giorgio), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.
Day (Arturo L.), Direttore del Laboratorio geo-fisico dell'Istituzione Carnegie, Washington, D. C. — 11 giugno 1922.
Washington (Enrico Stefano), Laboratorio geo-fisico di Washington. — Id. id.
Franchi (Secondo), Ingegnere, Geologo Capo nel R. Ufficio geologico, Roma. — Id. id.
Gortani (Michele), Professore di geologia nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Novarese (Vittorio), Ingegnere, Professore; Geologo Capo nel R. Ufficio geologico, Roma. — Id. id.

Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale.

Goebel (Carlo), Professore nell'Università di Monaco. — 13 febbraio 1898
Penzig (Ottone), Professore nell'Università di Genova. — Id. id.
Mangin (Luigi), Membro dell' Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — 15 maggio 1910.
De Vries (Ugo), Professore nella Università di Amsterdam. — 13 genn. 1918.
Bower (Federico Orpen), Professore nella Università di Glasgow. — 24 febbraio 1918.
Chodat (Roberto), Professore di botanica nell'Università di Ginevra. — 25 giugno 1922.
Longo (Biagio), Professore, Direttore del R. Orto botanico dell'Università di Pisa. — Id. id.
Gola (Giuseppe), Professore, Direttore del R. Orto botanico dell'Università di Padova. — Id. id.
Bois (Desiderato), Professore nel Museo di storia naturale di Parigi. — Id. id.

Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata.

Boulenger (Giorgio Alberto), Giardino botanico dello Stato, Bruxelles. — 28 gennaio 1900.

Marchand (Felice), Professore nell'Università di Leipzig. — 14 giugno 1903.

Lankester (Edwin Ray), Direttore del *British Museum of Natural History*. — 5 marzo 1905.

Ramôn y Cajal (Santiago), Professore nell'Università di Madrid. — 15 maggio 1910.

Kossel (Albrecht), Professore nell'Università di Heidelberg. — Id. id.

Albertoni (Pietro), Senatore del Regno, Professore nella Università di Bologna. — 24 febbr. 1918.

Bovero (Alfonso), Professore alla Facoltà di Medicina, S. Paolo del Brasile. — Id. id.

Chiarugi (Giulio), Professore nel R. Istituto di Studi superiori e di Perfezionamento di Firenze. — Id. id.

Vialleton (L.), Professore di Anatomia Microscopica, Montpellier. — Id. id.

Bottazzi (Filippo), Professore di fisiologia sperimentale nella R. Università di Napoli. — 11 giugno 1922.

Cesaris-Demel (Antonio), Professore di anatomia patologica nella R. Università di Pisa. — Id. id.

Gley (E.), Prof. di biologia generale nel *Collège de France*, Paris. — Id. id.

Richet (Charles), Professore di fisiologia nell'Università di Parigi. — Id. id.

Sherrington (Ch. S.), Professore di fisiologia nell'Università di Oxford. — Id. id.

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore.

De Sanctis (Gaetano), Professore stabile di Storia antica nella R. Università di Torino, Presidente della Unione Accademica Internazionale, ✻, Gr. Uff. ✠, Cav. Gr. Cr. del S. M. O. del Santo Sepolcro. — *Torino, Corso Vittorio Em., 44.*
Rieletto alla carica il 3 maggio 1925 per il triennio dal 20 aprile 1925 al 19 aprile 1928 (R. D. 2 luglio 1925).

Segretario.

Vidari (Giovanni), Professore stabile di Pedagogia nella R. Università di Torino, Gr. Uff. ✠ e ✠. — *Torino, Via Valeggio, 15.*
Rieletto alla carica il 3 maggio 1925 per il triennio dal 20 aprile 1925 al 19 aprile 1928 (R. D. 2 luglio 1925).

ACCADEMICI RESIDENTI

Boselli (S. E. Paolo), Senatore del Regno, Socio effettivo dei Lincei, Primo Segretario di S. M. per l'Ordine Mauriziano, ecc., Cav. Ord. Supr. SS. Annunziata, ✠, Gr. Cord. ✠ e ✠. — *Torino, Piazza Maria Teresa, 3.*
15 gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 13 ottobre 1897.

De Sanctis (Gaetano), *predetto.*
21 giugno 1903 - 8 luglio 1903. - Pensionato 15 febbraio 1912.

Ruffini (Francesco), *predetto.*
21 giugno 1903 - 8 luglio 1903. — Pensionato 19 giugno 1913.

Stampini (Ettore), Professore stabile di Letteratura latina nella R. Università di Torino, Gr. Uff. ✠ e Gran Croce e Gran Cordone ✠. — *Piazza Vittorio Veneto, 10.*
20 maggio 1906 - 7 giugno 1906. — Pensionato 24 gennaio 1915.

Brondi (Vittorio), Senatore del Regno, Professore stabile di Diritto amministrativo e Scienza dell'Amministrazione nella R. Università di Torino, Membro del Consiglio Superiore della P. I., Gr. Uff. ✠ e ✠. — *Torino, Via Montebello, 26.*
17 febbraio 1907 - 19 aprile 1907. — Pensionato 4 febbraio 1917.

Einaudi (Luigi), Senatore del Regno, Professore stabile di Scienza delle finanze e Diritto finanziario nella R. Università di Torino, Comm. ♔. — *Torino, Via La Marmora, 60.*
10 aprile 1910 - 1° maggio 1910. — Pensionato 13 dicembre 1917.

Schiaparelli (Ernesto), Senatore del Regno, Direttore del R. Museo di Antichità in Torino, Uff. ✠, Comm. ♔. — *Torino, Corso Oporto, 40.*
10 aprile 1910 - 1° maggio 1910. - Pensionato 11 luglio 1918.

Patetta (Federico), Professore stabile di Storia del Diritto italiano nella R. Università di Torino, ✠, Comm. ♔. — *Via S. Massimo, 44.*
3 maggio 1914 - 11 giugno 1914. — Pensionato 27 ottobre 1918.

Vidari (Giovanni), *predetto.*
31 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915. — Pensionato 23 febbraio 1920.

Prato (Giuseppe), Professore stabile di Economia politica nel R. Istituto superiore di Studi commerciali di Torino, ♔. — *Via Giuseppe Galliano, 21.*
31 gennaio 1915 - 14 febbraio 1915. — Pensionato 30 dicembre 1920.

Cian (Vittorio), Professore stabile di Letteratura italiana nella R. Università di Torino, Deputato al Parlamento, Comm. ♔. — *Piazza Statuto, 4.*
20 maggio 1917 - 10 giugno 1917. — Pensionato 2 ottobre 1922.

Pacchioni (Giovanni), Professore stabile di diritto civile nella R. Università di Milano, ♔. — *Milano* (33), *Via Fratelli Bronzetti, 28.*
20 maggio 1917 - 10 giugno 1917. — Pensionato 7 ottobre 1923.

Faggi (Adolfo), Professore stabile di Storia della filosofia nella R. Università di Torino, Comm. ♔. — *Torino, Via Vassalli Eandi, 3.*
18 gennaio 1920 - 12 febbraio 1920. — Pensionato, 3 ottobre 1926.

Luzio (Alessandro), Sovrintendente del R. Archivio di Stato di Torino, ✥, ✠, Comm. ♔. — *Via Principe Tommaso, 4.*
18 gennaio 1920 - 12 febbraio 1920.

Mosca (Gaetano), Senatore del Regno, Professore stabile di storia delle istituzioni e delle dottrine politiche nella R. Università di Roma, Comm. ✠, Gr. Uff. ♔. — *Roma (36), Via Piero Antonio Micheli, 18.*
18 gennaio 1920 — 12 febbraio 1920.

Jannaccone (Pasquale), Professore stabile di statistica nella R. Università di Torino, Comm. ♔. — *Torino, Via Principe Tommaso, 39.*
28 maggio 1922 - 13 luglio 1922.

Solari (Gioele), Professore stabile di filosofia del diritto nella R. Università di Torino. — *Torino, Via Maria Vittoria, 3.*
23 dicembre 1923 - 24 gennaio 1924.

Bertoni (Giulio), Professore stabile di filologia romanza, Comm. ♔. — *Torino, Via Principe Amedeo, 34.*
31 gennaio 1926 - 21 febbraio 1926.

Rondolino (Ferdinando), Dottore di leggi. — *Torino, Via Bogino, 16.*
31 gennaio 1926 - 21 febbraio 1926.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Comparetti (Domenico), Senatore del Regno, Professore emerito dell'Università di Pisa e del R. Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, ✠, Uff. ✻, Comm. ✠. — *Firenze, Via Lamarmora, 20.*
20 marzo 1892 - 26 marzo 1892.

Scialoja (Vittorio), Senatore del Regno, Professore stabile di Diritto romano nella R. Università di Roma, ✠, Gr. Cr. ✻ e ✠. — *Roma, Piazza Grazioli, 5.*
29 marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Rajna (Pio), Senatore del Regno, Professore emerito di Lingue e Letterature neo-latine nel R. Istituto di Studi superiori di Firenze, ✠, Gr. Uff. ✻ e ✠. — *Firenze (22), Piazza d'Azeglio, 13.*
29 marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Guidi (Ignazio), Senatore del Regno, Professore emerito di Ebraico e di Lingue semitiche comparate nella R. Università di Roma, ✠, Uff. ✻, Comm. ✠, C. O. St. P. di Svezia. — *Roma, Botteghe Oscure, 24.*
12 aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Sabbadini (Remigio), Professore emerito di Lingua e Letteratura latina nella R. Università di Milano, Comm. ✠. — *Pisa, Via Fibonacci, 19.*
23 giugno 1918 - 11 luglio 1918.

Salandra (S. E. Antonio), Deputato al Parlamento, Professore stabile di Diritto amministrativo nella R. Università di Roma, Socio straniero dell'Istituto di Francia, Cavaliere dell'Ordine supremo della SS. Annunziata, ✠, Gr. Cr. ✻ e ✠, ecc. — *Roma, Via Girolamo Fracastoro, 7.*
22 dicembre 1918 - 12 gennaio 1919.

ACCADEMICI STRANIERI

Nolhac (Pietro de), Professore nell'École pratique des hautes études di Parigi.
23 giugno 1918 - 11 luglio 1918.

Hauvette (Enrico), Professore di lingua e letteratura italiana alla Sorbona, Parigi.
28 maggio 1922 - 13 luglio 1922.

CORRISPONDENTI

Sezione di Scienze Filosofiche.

Pinloche (Augusto), Prof. nella Scuola Politecnica di Parigi. — 15 marzo 1896.
Chiappelli (Alessandro), Senatore del Regno, Professore emerito della R. Università di Napoli. — Id. id.
Zuccante (Giuseppe), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 31 maggio 1908.
Gentile (Giovanni). Prof. nella R. Università di Roma. — 17 maggio 1914.
Martinetti (Pietro). Prof. nella R. Università di Milano. — Id. id.
Bergson (Enrico Luigi), Membro dell'Istituto di Francia. — Id. id.
Varisco (Bernardino), Prof. nella R. Università di Roma. — 23 giugno 1918.

Sezione di Scienze Giuridiche e Sociali.

Bonfante (Pietro), Prof. nella R. Università di Roma. — 21 giugno 1903.
Brandileone (Francesco), Professore nella R. Università di Roma. — 10 giugno 1906.
Brini (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Fadda (Carlo), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Napoli. — Id. id.
Stoppato (Alessandro), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Montalcini (Camillo), Prof., Segretario generale degli uffizi amministrativi della Camera dei Deputati. — 17 maggio 1914.

Ranelletti (Oreste), Professore nella R. Univ. di Milano. — 23 giugno 1918.
Romano (Santi), Professore di diritto costituzionale nella R. Università di Milano. — 28 maggio 1922.
Sella (Emanuele), Professore di economia politica nella R. Università di Genova. — Id. id.
Dallari (Gino), Professore di filosofia del diritto nella R. Università di Pavia. — Id. id.

Sezione di Scienze Storiche.

Birch (Walter de **Gray**), del Museo Britannico di Londra. — 14 marzo 1886.
Venturi (Adolfo), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 31 maggio 1908.
Meyer (Edoardo), Prof. nell'Università di Berlino. — 17 maggio 1914.
Lippi (Silvio), Direttore dell'Archivio di Stato di Cagliari. — Id. id.
Pareti (Luigi), Professore di storia antica nella R. Uiversità di Firenze. — 28 maggio 1922.

Sezione di Archeologia ed Etnografia.

Orsi (Paolo), Dirett. del Museo Archeologico di Siracusa. — 31 maggio 1908.
Patroni (Giovanni), Professore nella R. Università di Pavia. — Id. id.
Halbherr (Federico), Prof. nella R. Università di Roma. — 23 giugno 1918.
Marucchi (Orazio), Professore nella R. Università di Roma. — Id. id.
Paribeni (Roberto), Direttore del Museo Nazionale Romano (delle Terme). — Id. id.
Breccia (Evaristo), Direttore del Museo Greco-Romano di Alessandria di Egitto. — 28 maggio 1922.

Sezione di Geografia.

Bertacchi (Cosimo), Professore nella R. Univ. di Torino. — 31 maggio 1908.

Sezione di Linguistica e Filologia orientale.

Nallino (Carlo Alfonso), Professore nella R. Università di Roma. — 23 giugno 1918.
Vacca (Giovanni), Professore di storia e geografia dell'Asia orientale nella R. Università di Roma — 28 maggio 1922.
Levi Della Vida (Samuele Giorgio), Professore di lingue semitiche nella R. Università di Roma. — Id. id.

Sezione di Filologia, Storia letteraria e Bibliografia

Del Lungo (Isidoro), Senatore del Regno, Socio residente della R. Accademia della Crusca (Firenze). — 16 marzo 1890.

Rossi (Vittorio), Professore nella R. Università di Roma. — 21 giugno 1903.

Boffito (Giuseppe), Professore nel Collegio alle Querce in Firenze. — Id. id.

Vitelli (Gerolamo), Senatore del Regno, Professore emerito nel R. Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze. — 31 maggio 1908.

Zuretti (Carlo Oreste), Professore nella R. Università di Milano. — 26 febbraio 1911.

Rostagno (Enrico), Bibliotecario della Mediceo-Laurenziana di Firenze. — 23 giugno 1918.

Barbi (Michele), Professore nel R. Istituto super. di magist. di Firenze (Taviano Pistoiese). — Id. id.

Galletti (Alfredo), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.

Scherillo (Michele), Senatore del Regno, Professore di letteratura italiana presso la Università di Milano. — 28 maggio 1922.

Bassi (Domenico), Direttore dell'officina dei Papiri presso la Biblioteca nazionale di Napoli. — 28 maggio 1922.

Sanesi (Ireneo), Professore di letteratura italiana nella R. Università di Pavia. — Id. id.

Romagnoli (Ettore), Professore di letteratura greca nella R. Università di Pavia. — Id. id.

Bignone (Ettore), Professore di letteratura greca nella R. Università di Palermo. — Id.

Mutazioni avvenute nel Corpo Accademico

dal 1° gennaio al 31 dicembre 1926

ELEZIONI

Bertoni prof. Giulio,

Rondolino avv. Ferdinando,

eletti Soci nazionali residenti della Classe di scienze morali, storiche e filologiche nella seduta del 31 gennaio 1926 (R. D. di approvazione del 21 febbraio 1926).

MORTI

21 gennaio 1926.

Golgi (prof. Camillo), Socio nazionale non residente della Classe di scienze fisiche.

23 gennaio 1926.

Mercier (Card. Desiderato), Socio straniero della Classe di scienze morali.

21 febbraio 1926.

Kamerlingh Onnes (Heike), Socio straniero della Classe di scienze fisiche.

7 luglio 1926.

Polacco (Vittorio), Corrispondente della Classe di scienze morali.

22 settembre 1926.

Pascal (Carlo), Corrispondente della Classe di scienze morali.

2 ottobre 1926.

Naccari (prof. Andrea), Socio nazionale residente della Classe di scienze fisiche.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 14 Novembre 1926

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Parona, Grassi, Somigliana, Panetti, Sacco, Herlitzka, Boggio, Garelli, Reposs e il Segretario Mattirolo.

Scusano l'assenza i Soci Pochettino e Guidi.

Il Segretario dà lettura del verbale dell'adunanza precedente, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Presidente, aprendo la prima adunanza dell'anno accademico 1926-27, ricorda con affettuose e commosse parole il Socio Andrea Naccari, già Presidente della R. Accademia, morto il giorno 2 ottobre del corrente anno.

Egli ricorda i meriti e le virtù della mente e del cuore dello scienziato modestissimo che ebbe sincera, profonda e sapiente dirittura di vita e specchiata altezza morale, unita ad un concetto elevatissimo della scienza alla quale dedicò tutta la vita.

Il Socio D'Ovidio si associa alle parole del Presidente e come amico devoto dell'estinto ne illustra le doti e le benemerenze scientifiche.

Il Presidente propone e l'adunanza a voti unanimi approva che la commemorazione del compianto nostro Socio sia affidata al Socio Alfredo Pochettino, successore al Naccari nella Cattedra di Fisica.

Il Presidente dà quindi comunicazione del telegramma da lui inviato a S. E. il Presidente del Consiglio a Roma in segno di profonda esultanza per lo scampato pericolo, e dà lettura del telegramma di risposta e di ringraziamento inviato all'Accademia da S. E. il Ministro FEDELE.

Viene quindi data comunicazione di una lettera inviata dal Segretario perpetuo dell'Accademia delle Scienze di Parigi nella quale si invita il nostro Sodalizio a partecipare alle onoranze che verranno rese nel mese di ottobre alla memoria di Marcellino BERTHELOT nell'occasione del centenario della sua nascita.

Il Presidente assicura che nel caso l'Accademia non potesse essere direttamente rappresentata da un Socio, sarà incaricato di tale rappresentanza uno dei nostri Soci stranieri.

Il Presidente annunzia quindi, che nella ventura domenica 21 corr. avrà luogo un'adunanza a Classi unite per la elezione dei componenti la Commissione per il Premio Bressa. Egli comunica inoltre che ai Soci corrispondenti il Consiglio d'Amministrazione ha accordato n° 16 facciate di stampa negli *Atti* per lavori che portino la loro firma, riducendo ai Soci nazionali la disponibilità a 32 facciate per lavori proprii ed a 16 per lavori di terzi.

Il Segretario presenta, a nome del Socio nazionale non residente Prof. LEVI-CIVITA, l'omaggio del vol. II delle sue *Lezioni di Meccanica razionale.*

Il Socio SACCO nel nome della Presidenza del T. C. I. presenta in omaggio i due volumi relativi allo *Studio e distribuzione delle 2000 Grotte della Venezia Giulia*, editi da L. V. Bertarelli e da E. Boegan, e pubblicati dopo la morte del compianto desideratissimo Bertarelli.

Questa splendida monografia, precisa, minuta della Speleologia della Venezia Giulia, è il risultato di quarant'anni di esplorazioni, compiute specialmente dal BOEGAN.

Essa è divisa in due parti.

La prima tratta del fenomeno cosidetto *carsico*; della Flora

e della Fauna cavernicole, della paleontologia e della paletnologia, della difficile tecnica delle esplorazioni, delle acque sotterranee, ecc.

La seconda parte dell'opera costituisce il *catasto illustrato* di tutte (circa 2000) le cavità sotterranee finora note nella Venezia Giulia.

370 Sezioni, 200 Tavole, profili, piante di grotte, Schizzi geologici, ecc., accompagnano la grande Carta della distribuzione delle Grotte, facendo di quest'opera, redatta colle cure più diligenti e sapienti, un vero modello del genere.

Il Socio Grassi fa dono all'Accademia del 1° volume della 6ª edizione del suo *Corso di Elettrotecnica*, nel quale si trattano i *principî scientifici* di detta scienza.

Il Presidente ringrazia.

Il Socio Panetti presenta quindi e fa omaggio all'Accademia dei seguenti suoi lavori, dei quali brevemente discorre:

1) *Il Dirigibile italiano e il volo polare di Umberto Nobile.*

2) *Contributo ai problemi sull'assetto trasversale dell'aeroplano, azione di deriva sulla velatura portante.*

3) *La teoria dell'ala indefinita e le sue applicazioni.*

4) *Sull'attrito cinetico nelle macchine.*

Il Socio Peano presenta quindi per la inserzione negli *Atti* una Nota del sig. Ugo Cassina, *Limiti delle funzioni plurivoche.*

Il Socio Boggio presenta una Nota del Prof. Francesco Tricomi, dal titolo: *Risoluzione di un problema demografico.*

I due lavori vengono accolti per gli *Atti*.

LETTURE

Limiti delle funzioni plurivoche.

Nota del Prof. UGO CASSINA

presentata dal Socio nazionale residente Giuseppe Peano

Dò il nome di *funzione plurivoca* alle classi funzioni di una o più variabili (o " figure variabili ", v. § 2). In questa mia Nota — che deve considerarsi come l'introduzione alla *Teoria generale delle funzioni plurivoche* — introduco il concetto di " classe dei valori limiti " d'una funzione plurivoca. Mediante poi il nuovo concetto di " funzione univoca subordinata da una funzione plurivoca " riesco a caratterizzare in modo semplice la composizione della classe dei valori limiti stabilendo un risultato (§ 3, n. 3) che parmi notevole. Esso mi permette in particolare di dare la nuova definizione generale di " classe dei limiti unici " (§ 4) di una funzione plurivoca e di stabilire per tali funzioni dei teoremi che mi sembrano importanti e nuovi (§ 3, n[i] 1, 2, 3·1, 3·3; § 4, n[i] 2, 3, 4·1, 4·3).

La ristrettezza dello spazio mi vieta di aggiungere, come desidererei, un esame critico comparativo dei vari concetti espressi con la parola " limite " e di arricchire la Nota con diffuse notizie storiche e bibliografiche (¹).

(¹) Si v. p. es. A. Cauchy, *Anal. alg.*, 1821, p. 30; N. H. Abel, *Œuvres*, 1826, t. 2, p. 299; P. du Bois Reymond, *Abhandl. Ak. München*, 12, Abt. 1, 1875, p. 124; O. Bonnet, *Bull. des sciences math.*, 1871, t. 2, p. 215; G. Peano, *Amer. journ. of math.*, 1894, t. 17, pp. 33-68; *Atti R. Acc. Scienze Torino*, v. 48, 1912-13.

§ 1. — Definizioni preliminari.

1. — I " campi „ nei quali saranno definite le funzioni che considererò saranno costituiti da una classe qualunque di *numeri reali* (q), o di *numeri imaginari* (q'), o di *numeri complessi ad n dimensioni* (q_n), o di *punti* (p) [1], o di *vettori* (v), o di *omografie vettoriali* (H), o di *sostituzioni lineari sui complessi di ordine n* (Sb_n).

Farò uso di alcune notazioni tolte dal *Formulario* di G. Peano [2] ed ora abbastanza note. E scriverò anche qualche proposizione completamente in simboli. Ma volendo che la mia Nota sia leggibile anche da chi non conosce i simboli della logica matematica — che però permettono di esprimere in modo chiaro, preciso e condensato in breve spazio enunciati altrimenti lunghi e complicati — di ogni proposizione che verrò enunciando in simboli darò la completa versione in lingua ordinaria, ed inoltre accenno qui brevemente al significato dei simboli principali di cui farò uso nel testo.

2. – È fondamentale il concetto di " modulo „, che nel senso di " valore assoluto „ d'una quantità numerica a è stato già considerato da Leibniz e da lui indicato con " mol a „ (da leggersi " moles a „). Argand (1814) e Cauchy (1821) hanno adottato la forma " mod „, ora adoperata da vari A. (in concorrenza con altre notazioni) e che io pure seguirò.

·1 " Se a è un numero reale allora " mod a „ è il suo valore assoluto; se a è un numero imaginario allora " mod $a = \sqrt{[(\text{real } a)^2 + (\text{imag } a)^2]}$ „, dove " real a „ ed " imag a „ indicano rispettivamente la parte reale e il coefficente dell'imaginario di a; se a è un vettore allora " mod a „ è eguale alla sua lunghezza; se a è un complesso di ordine n allora " mod a „ è eguale alla radice quadrata della somma dei quadrati delle sue coordinate „.

---

(1) " propri „ della geometria euclidea.

(2) *Formulario mathematico* (ed. 5ª, Bocca, Torino 1908), abbrev. in F. V.; T. Boggio, *Calcolo differenziale* (Lattes, Torino 1921).

·2 " Sia ora a una sostituzione lineare sui complessi di ordine n (od un'omografia vettoriale). Allora, fondandosi su proprietà delle forme quadratiche, si può dimostrare che la classe descritta da " mod (ax)/mod x " al variare di x nei complessi di ordine n (o vettori) non nulli ha un massimo finito. Seguendo G. PEANO (F. V., p. 149) porrò " mod a " eguale a tale massimo ".

3. — ·0 " Indicherò con q* — da leggersi *campo reale ampliato* (o classe dei *numeri reali finiti ed infiniti*) la classe ottenuta aggiungendo $+\infty$ e $-\infty$ alla classe dei numeri reali ".

·1 " Darò il nome di *figura numerica* ad ogni classe non vuota contenuta nel campo reale ampliato ".

·2 " Sia u una figura numerica, allora dirò che essa è *finita* se non contiene nè $+\infty$, nè $-\infty$; dirò che è *limitata* quando il limite superiore della classe mod u è una quantità finita; e dirò che è *illimitata* nel caso contrario ".

4. — Per stabilire il teorema fondamentale relativo alla composizione della classe dei valori limiti di una funzione plurivoca (§ 3, n. 3) ho bisogno del concetto di corrispondenza fra numeri reali e classi non vuote contenute nel campo reale ampliato (q*) e del concetto di limite per tali corrispondenze. Devo perciò estendere i concetti di classe *derivata* e di classe *limite* d'una classe di numeri (indicati dal *Formulario* coi simboli δ, ∇, λ, Λ) alle classi non vuote contenute nel campo reale ampliato. Perciò premetto le definizioni seguenti:

·1 " Se a, b sono numeri reali finiti, allora con " dist (a, b) " — *distanza di a da b* — indicherò il modulo della differenza " $b - a$ "; e se a è un numero reale finito porrò " dist $(a, +\infty) = \infty$ ", " dist $(a, -\infty) = \infty$ ", infine porrò " dist $(+\infty, +\infty) =$ dist $(-\infty, -\infty) = 0$ ", " dist $(-\infty, +\infty) = \infty$ ".

·2 " Sia a un numero reale finito od infinito ed u una figura numerica arbitraria, allora con " dist (a, u) " indicherò il limite inferiore delle distanze di a dagli elementi di u ".

·3 " Siano u, v delle figure numeriche, allora con " dist (u, v) " indicherò il limite inferiore delle distanze degli elementi di u da quelli di v ".

·4 " Sia u una figura numerica, allora con " δu " indicherò la classe formata da tutti i numeri finiti x aventi distanza

nulla dalla classe formata dagli individui di u diversi da x; con " ∇u " indicherò la classe formata aggiungendo a δu l'elemento $+\infty$ se esso è il limite superiore degli u diversi da $+\infty$ e l'elemento $-\infty$ se esso è il limite inferiore degli u diversi da $-\infty$; con " λu " la classe ottenuta riunendo insieme le classi u e δu; con " Λu " la classe ottenuta riunendo insieme le classi u e ∇u ".

La classe δu è stata introdotta da G. CANTOR (*Math. Ann.*, Bd. 5, 1872, p. 128) e da lui detta " derivata " (*Ableitung*) di u. La distinzione fra δ e ∇ e l'introduzione delle idee espresse dai simboli λ e Λ è fatta nel *Formulario*. G. CANTOR chiama ogni elemento di δu " punto limite " (*Grenzpunkt*). Altri A. hanno fatto uso delle locuzioni " punto di accumulazione " (*Häufungspunkt*) o " punto di condensazione " (*Verdichtungspunkt*) [1].

" Io darò spesso il nome di *elementi di condensazione* agli elementi della classe ∇u ".

5. — ·0 Indicherò con v*, p*, q_n*, H*, Sb_n*, q'* le classi ottenute riunendo insieme ∞ con gli elementi rispettivamente delle classi v, p, q_n, H, Sb_n, q'.

·1 Ad ogni classe non vuota contenuta in una delle classi sopra elencate darò il nome di *figura*. Dirò che due figure sono della *stessa specie* se appartengono ad una stessa di dette classi.

·2 Ciò posto, si estendono facilmente le definizioni date dianzi per le figure numeriche alle figure qualunque: basta sostituire a q successivamente v, p, H, ecc., ai due elementi $+\infty$ e $-\infty$ l'unico elemento ∞ e, poichè non si può parlare di modulo d'un punto, se u indica una classe di punti sostituire " mod u " con " mod $(u-u)$ " (ove $u-u$ indica la classe descritta da $x-y$ col variare comunque di x e di y in u). — Si deduce:

·3 " Se u è una classe non vuota contenuta in v* ed i è un vettore, allora:

$$\delta(u\times i) = i\times\delta u\,, \qquad \nabla(u\times i) = i\times\nabla u\,,$$
$$\lambda(u\times i) = i\times\lambda u\,, \qquad \Lambda(u\times i) = i\times\Lambda u \text{ ''},$$

e formole analoghe per gli altri tipi di figure.

---

[1] Cfr. *Recherches contemporaires sur la théorie des fonctions* di E. BOREL e L. ZORETTI, II_3 (" Encycl. des sciences math. ").

·4 Risulta anche che " se u è una qualunque figura, allora λu si compone di tutti gli elementi finiti x tali che data ad arbitrio la quantità positiva h esiste sempre un elemento di u e sia y tale che " $\mathrm{mod}\,(y - x) < h$ ", ed inoltre da ∞ (oppure da $+\infty$ o da $-\infty$) se esso appartiene ad u ".

·5 Si dimostrano facilmente le proprietà espresse dalle formole seguenti:

$$u, v \,\epsilon\, \mathrm{Cls}'\, \mathrm{p}^* \sim \iota \wedge . \supset :$$

·50 $\lambda\lambda u = \lambda u$. ·51 $\Lambda\lambda u = \lambda\Lambda u = \Lambda u$.

·52 $\Lambda\Lambda u = \Lambda u$. ·53 $\Lambda(u \cup v) = \Lambda u \cup \Lambda v$.

·54 $u \supset v . \supset . \Lambda u \supset \Lambda v$

·6 Secondo la nomenclatura di G. Cantor, se u è una figura finita, allora:

$\lambda u = u$ equivale a dire che la figura u è *chiusa*,
$\delta u = u$ " " " " " *perfetta.*

Perciò, se u è una figura ad elementi finiti, allora λu è la minima figura chiusa contenente u. Io generalizzerò la nomenclatura di G. Cantor e precisamente: " essendo u una qualunque figura (a elementi finiti od infiniti), porrò:

minima figura chiusa contenente $u = \lambda u$;
minima figura chiusa a elementi finiti od infiniti contenente $u = \Lambda u$ ".

6. — *La figura u e la minima figura chiusa contenente u hanno eguale distanza da qualunque elemento finito a.* In simboli (1):

$$a \,\epsilon\, \mathrm{p} . \quad u \,\epsilon\, \mathrm{Cls}'\, \mathrm{p}^* \sim \iota \wedge . \supset . \quad \mathrm{dist}\,(a, u) = \mathrm{dist}\,(a, \lambda u).$$

Dim. — Poichè u è contenuta in λu si ha:

$$\mathrm{dist}\,(a, \lambda u) \leqq \mathrm{dist}\,(a, u) \qquad (1).$$

Viceversa:

$$\mathrm{dist}\,(a, \lambda u) \geqq \mathrm{dist}\,(a, u) \qquad (2).$$

Invero neghiamo la (2). Posto " $k = \mathrm{dist}\,(a, u)$ " supponiamo dunque che " $\mathrm{dist}\,(a, \lambda u) < k$ ". Allora per la definizione di distanza esiste un elemento z finito appartenente a λu e tale che

(1) Nelle proposizioni che enuncerò sotto forma simbolica di solito scriverò p al posto di una qualunque delle classi considerate nel n. 1.

" dist $(a, z) < k$ "; cioè " mod $(a - z) < k$ "; quindi esiste una quantità positiva k' minore di k e tale che " mod $(a - z) < k'$ ". Ma poichè " $k - k' > 0$ ", per la definizione di λu, esiste un elemento finito x di u tale che " mod $(z - x) < k - k'$ ". Ma si ha:

$$\text{mod}\,(a - x) = \text{mod}\,(a - z + z - x) \leq \text{mod}\,(a - z) + \\ + \text{mod}\,(z - x) < k' + k - k' = k\,;$$

dunque esiste un valore x appartenente ad u e tale che " mod $(a - x) < k$ " contro l'ipotesi che la distanza di a da u sia eguale a k.

Vale perciò la (2). Da (1) e (2) si deduce il teorema.

§ 2. — Definizioni e prime proprietà della classe dei valori limiti delle funzioni plurivoche.

1. — Richiamo le definizioni di somma e di prodotto logico *universale* (v. *Form.*, V, p. 82).

·0 " Sia u una classe avente come elementi delle classi, allora con " $\cup u$ " — da leggersi *somma delle u* — si indica la classe i cui elementi sono tutti e soli gli individui che costituiscono gli elementi di u ", o, sotto altra forma: " $\cup u$ è la classe costituita da tutti gli elementi y per i quali esiste almeno un individuo x appartenente ad u che lo contenga ".

·1 " Nelle stesse ipotesi con " $\cap u$ " — da leggersi *parte comune alle u* — si indica la classe formata dagli individui che sono comuni a tutti gli elementi di u ".

2. — ·0 Com'è noto, il concetto generale di " funzione " nel significato di " corrispondenza " fa parte del linguaggio comune o logica generale, ed è stato considerato da Aristotele (4ª categoria); ma in matematica l'idea generale di " funzione univoca " (*eindeutig*) è stata introdotta per la prima volta da G. Lejeune Dirichlet (1837, *Werke*, Bd. 1, p. 135), che ha considerato le funzioni " reali definite in un intervallo ".

L'idea di " funzione plurivoca " è la generalizzazione di questo concetto. Precisamente:

" Siano u e v due classi ed f un simbolo (operatore) tale che per ogni elemento x di u avvenga che fx sia una classe

formata con elementi di v, allora dirò che f è una *funzione plurivoca* della variabile x definita nel campo u „.

Suole anche dirsi, ed anch'io farò uso di questa locuzione, che f è una *figura variabile* definita nel campo u (G. Peano, *Applic. geom.*, p. 302, 1887; F. D'Arcais, *Calc. infin.*, v. 2, p. 102, 1901).

·1 “ Sia f una funzione plurivoca definita nel campo u, allora dirò che f è *finita* se, per ogni valore x del campo u, avviene che fx è finita; e dirò che è *limitata* se, per ogni valore x del campo u, avviene che fx è limitata „.

·2 “ Indicherò con $f`u$ — da leggersi *campo imagine della funzione f definita nel campo u* — la classe descritta da fx col variare di x in u „.

Ciò posto darò la definizione seguente:

·3 *Sia f una funzione plurivoca definita nel campo u e sia x un elemento di condensazione di u, allora con la scrittura* “ $\mathrm{Lm}\,(f, u, x)$ „ — da leggersi *classe dei valori limiti finiti od infiniti della f definita nel campo u calcolata per il valore x — indicherò la classe di tutti gli elementi a tali che, presa ad arbitrio la figura v non avente x come elemento di condensazione, sempre avvenga che a appartiene alla minima classe chiusa ad elementi finiti od infiniti contenente la somma degli individui di cui sono costituiti gli elementi del campo imagine della f quando essa è applicata a tutti i valori di u non eguali ad x e non appartenenti alla figura v.*

In simboli:

$$u \,\epsilon\, \mathrm{Cls}'\,\mathrm{p}^* \,.\, x \,\epsilon\, \nabla u \,.\, f \,\epsilon\, (\mathrm{Cls}'\,\mathrm{p}^* \sim \iota \wedge)\,\mathrm{f}u \,.\, \supset .$$
$$\mathrm{Lm}\,(f, u, x) = \cap\, [\Lambda \} \cup (f`\, u \sim v \sim \iota x) \{ |\, v`\,\mathrm{Cls}'\,\mathrm{p}^* \cap v \ni (x \sim\epsilon\, \nabla v)].\ \mathrm{Def.}$$

3. — ·0 Dalla definizione generale precedente si possono dedurre varie definizioni particolari distinguendo vari casi secondo che x è finito od infinito e secondo che il valore limite preso in esame è finito od infinito. Ma con un cambiamento di variabile ci si può sempre ricondurre — senza venir meno alla generalità — a considerare limiti relativi a elementi di condensazione finiti, perciò in seguito supporrò quasi sempre x finito.

La definizione ·3 del n. precedente si può, per esempio, trasformare così:

·1 *Sia f una funzione plurivoca definita nel campo u e*

sia x un elemento di condensazione finito di u, allora " Lm (f, u, x) " *indica la classe formata da tutti gli elementi a tali che: a è finito e date ad arbitrio le quantità positive h ed k è sempre possibile trovare degli elementi y di u non eguali ad x aventi da x una distanza minore di h e tali che la distanza fra fy ed a sia minore di k,*

oppure a è eguale all'infinito e data ad arbitrio la quantità positiva h sempre avviene che la somma degli individui appartenenti ai singoli elementi del campo imagine della f quando essa è applicata ai valori y di u non eguali ad x ed aventi da x distanza minore di h sia un campo illimitato.

Ed è di tale forma che farò quasi sempre uso in seguito.

In simboli (§ 1) si ha:

$$u \,\epsilon\, \mathrm{Cls'}\,\mathrm{p}^* \,.\, x \,\epsilon\, \mathrm{p} \cap \delta u \,.\, f \,\epsilon\, (\mathrm{Cls'}\,\mathrm{p}^* \sim \iota \wedge)\, \mathrm{f} u \,.\, \supset .$$

$$\mathrm{p} \cap \mathrm{Lm}\,(f, u, x) = \mathrm{p} \cap a \ni [h, k \,\epsilon\, \mathrm{Q} \,.\supset_{h,k} .\, \exists\, u \sim \iota x \cap y \ni \}\, \mathrm{mod}\,(y - x) < h \,.$$
$$\mathrm{dist}\,(a, fy) < k] \,.$$
$$\infty \,\epsilon\, \mathrm{Lm}\,(f, u, x) :=:$$
$$h \,\epsilon\, \mathrm{Q} \,.\supset_h .\, \cup [f'\, u \sim \iota x \cap y \ni \}\, \mathrm{dist}\,(x, y) < h \{] \,\epsilon \sim \mathrm{limit}.$$

4. — " Sia f una funzione plurivoca definita nel campo u ed x un elemento di condensazione di u, allora la classe " Lm (f, u, x) " non è mai vuota; la sua parte finita è " chiusa "; inoltre se f è una funzione plurivoca numerica (figura numerica variabile) essa ammette massimo e minimo valore limite, che sono i " limiti d'indeterminazione " (*Unbestimmttheitsgrenzen*) di certi A. ".

Queste proprietà sono state dimostrate da G. Peano (*An. inf.*, 1893) per le funzioni univoche, ma le dimostrazioni datene valgono senz'altro anche per quelle plurivoche.

§ 3. — Nuove proprietà della classe dei valori limiti delle funzioni plurivoche.

1. — *Sia f una funzione plurivoca definita nel campo u, allora preso ad arbitrio l'elemento di condensazione x di u sempre avviene che la classe* " Lm (f, u, x) " *è una parte della minima classe chiusa ad elementi finiti od infiniti contenente la somma*

degli individui con cui sono composti gli elementi del campo imagine della f. In simboli:

$u \epsilon \text{Cls}' \text{p}^* . x \epsilon \nabla u . f \epsilon (\text{Cls}' \text{p}^* \sim \iota \bigwedge) \text{F} u . \supset . \text{Lm}(f, u, x) \supset \Lambda \cup (f' u).$

Per tirannia di spazio si omette la semplice dimostrazione di questo teorema.

2. — ·0 " Sia f una funzione plurivoca, allora Λf — prodotto funzionale degli operatori f e Λ — indica quella funzione plurivoca tale che se u è un campo nel quale è definita la f ed x è un elemento di u, allora, qualunque siano x ed u, sempre si ha:

$$(\Lambda f) x = \Lambda (f x) \text{ ''}.$$

Nelle stesse ipotesi, analogo significato avranno le scritture λf, δf, ∇f.

Dirò anche che " λf e Λf sono le minime figure chiuse contenenti la figura variabile f " (v. § 1, n. 5).

·1 *Sia f una funzione plurivoca definita nel campo u, allora la minima figura chiusa contenente la somma degli individui appartenenti ai singoli elementi del campo imagine della f coincide con la minima figura chiusa contenente la somma degli individui appartenenti ai singoli elementi del campo imagine di* λf. Cioè:

$$u \epsilon \text{Cls}' \text{p}^* . f \epsilon (\text{Cls}' \text{p}^* \sim \iota \bigwedge) \text{F} u . \supset . \quad \lambda \cup (f' u) = \lambda \cup (\lambda f' u).$$

Dim. — Farò uso dei segni ϵ, $\supset$ per indicare " l'appartenenza " di un individuo ad una classe o di una classe ad una classe. Allora:

Si supponga che z sia un elemento finito e che " $z \epsilon \lambda \cup (f' u)$ "; ciò vuol dire che " $\text{dist}\,[z, \cup (f' u)] = 0$ ", cioè dato ad arbitrio il numero positivo h sempre esiste un elemento di $\cup (f' u)$ e sia t tale che " $\text{dist}\,(z, t) < h$ ". Ma il dire che t appartiene a $\cup (f' u)$ equivale a dire che esiste un elemento v di $f' u$ e tale che " $t \epsilon v$ ". Ma il dire che v è un elemento di $f' u$ equivale a dire che esiste un elemento y di u e tale che " $v = f y$ ". Perciò " $t \epsilon f y$ " e quindi " $\text{dist}\,(z, f y) \leq \text{dist}\,(z, t) < h$ ". E poichè h è arbitrario si ha che " $\text{dist}\,(z, f y) = 0$ ".

Dunque: " il dire che z è finito e che " $z \epsilon \lambda \cup (f' u)$ " equivale a dire che esiste un elemento y di u tale che " $\text{dist}\,(z, f y) = 0$ "; e il dire che " $\infty \epsilon \lambda \cup (f' u)$ " equivale a dire che esiste un elemento y di u tale che " $\infty \epsilon f y$ ". (α).

Analogamente: " il dire che z è finito e che " $z \epsilon \lambda \cup (\lambda f' u)$ " equivale a dire che esiste un elemento y di u tale che " $\text{dist}(z, \lambda f y) = 0$ "; e il dire che " $\infty \epsilon \lambda \cup (\lambda f' u)$ " equivale a dire che esiste un elemento y di u tale che " $\infty \epsilon \lambda f y$ ". (β).

Ma, poichè z è finito, qualunque sia l'elemento y di u si ha " $\text{dist}(z, f y) = \text{dist}(z, \lambda f y)$ " (v. § 1, n. 6); d'altra parte si ha pure in ogni caso " $f y \supset \lambda f y$ "; quindi la (α) equivale alla (β), cioè vale la proposizione enunciata.

Si ha anche:

$$\cdot 01 \quad \text{Hp} \cdot 0 \quad . \supset . \quad \Lambda \cup (f' u) = \Lambda \cup (\Lambda f' u).$$

·1 Da questa proposizione risulta subito, sottintendendo l'elemento di condensazione per il quale si calcolano i limiti, e il campo in cui sono definite le funzioni:

Le funzioni plurivoche f e Λf hanno eguali valori limiti,

o sotto altra forma:

Ogni figura variabile ha gli stessi valori limiti della minima figura chiusa a elementi finiti od infiniti che la contiene. In simboli:

$$u \epsilon \text{Cls}' \text{p}^* . x \epsilon \nabla u . f \epsilon (\text{Cls}' \text{p}^* \sim \iota \Lambda) \text{f} u . \supset .$$
$$\text{Lm}(f, u, x) = \text{Lm}(\Lambda f, u, x).$$

3. — ·0 " Sia f una funzione plurivoca, allora dirò che g è una *funzione* (univoca) *subordinata da* f — o che g è un elemento della classe Cf — quando, essendo u un campo nel quale è definita la f ed x un elemento di u, avvenga, qualunque siano x ed u, che gx è un elemento di fx ".

In tal caso dirò anche che " g è un elemento della figura variabile f ".

In simboli:

$$\exists \{ (u, v) \ni [u, v \epsilon \text{Cls} . f \epsilon (\text{Cls}' v) \text{f} u] \} . \supset .$$
$$Cf = g \ni [u, v \epsilon \text{Cls} . f \epsilon (\text{Cls}' v) \text{f} u . x \epsilon u . \supset_{u, v, x} . g x \epsilon f x]. \quad \text{Def.}$$

Si ha il seguente lemma:

·1 *Sia a un numero reale ed u una classe non vuota di numeri reali, allora uno almeno dei due numeri* " $a - \text{dist}(a, u)$ " " $a + \text{dist}(a, u)$ " *appartiene a* " λu ".

In simboli:

$$a \epsilon \text{q} . u \epsilon \text{Cls}' \text{q} \sim \iota \Lambda . \supset .$$
$$\exists \{ (\lambda u) \cap x \ni [\text{dist}(a, x) = \text{dist}(a, u)] \}.$$

Dim. — Dalle definizioni di " distanza " e di " limite inferiore " (§ 1) si deduce: dato ad arbitrio il numero positivo k esiste almeno un elemento x di u tale che " $\text{dist}(a, u) \leqq \text{mod}(a - x) \leqq \text{dist}(a, u) + k$ ", cioè tale che " $\text{dist}(a, u) \leqq a - x \leqq \text{dist}(a, u) + k$ " oppure tale che " $\text{dist}(a, u) \leqq x - a \leqq \text{dist}(a, u) + k$ ", od anche tale che " $a - \text{dist}(a, u) - k \leqq x \leqq a - \text{dist}(a, u)$ " oppure tale che " $a + \text{dist}(a, u) \leqq x \leqq a + \text{dist}(a, u) + k$ ".

Dalle definizioni di λ si deduce dunque che " $a - \text{dist}(a, u) \in \lambda u$ " oppure " $a + \text{dist}(a, u) \in \lambda u$ ", che è quanto volevasi dimostrare.

Corollario:

·2 *Sia u una classe di quantità, f una classe non vuota di quantità funzione definita nel campo u ed a un numero reale; allora la funzione g che ad ogni valore x di u fa corrispondere il più grande numero di " $\lambda f x$ " eguale ad " $a - \text{dist}(a, fx)$ " oppure ad " $a + \text{dist}(a, fx)$ " è una funzione subordinata da λf.*

In simboli:

$$u \in \text{Cls}'\text{q} \,.\, f \in (\text{Cls}'\text{q} \sim \iota \wedge)\, \text{f} u \,.\, a \in \text{q} \,.\supset:$$
$$\max [(\lambda f x) \frown z \ni \{\text{dist}(a, z) = \text{dist}(a, fx)\}] \mid x \in \} g \ni [x \in u \,.\supset_x .\, gx \in \lambda f x] \{.$$

Il teorema è conseguenza immediata dell'ipotesi e del teorema precedente.

·3 *Sia f una funzione plurivoca definita nel campo u ed x un elemento di condensazione di u, allora la classe dei valori limiti di f definita nel campo u calcolata per il valore x è costituita da tutti e soli gli elementi a per i quali esiste almeno una funzione subordinata da Λf, e sia g, tale che a sia un valore limite di g definita nel campo u calcolato per il valore x.*

Sotto altra forma abbreviata:

Sia f una figura variabile, allora i suoi valori limiti sono tutti e soli i valori limiti degli elementi variabili appartenenti alla minima figura chiusa a elementi finiti od infiniti che la contiene.

In simboli:

$$u \in \text{Cls}'\text{p}^* \,.\, f \in (\text{Cls}'\text{p}^* \sim \iota \wedge)\, \text{f} u \,.\, x \in \nabla u \,.\supset .$$
$$\text{Lm}(f, u, x) = \cup [\text{Lm}(g, u, x) \mid g` \text{C} \Lambda f] =$$
$$= a \ni \exists \} g \ni [y \in u \,.\supset_y .\, gy \in \Lambda f y : a \in \text{Lm}(g, u, x)] \{.$$

Dim. — Farò la dimostrazione nel caso in cui x è finito (il che non toglie nulla alla generalità).

1°. Supporrò dapprima che f sia una funzione plurivoca *numerica* (cioè v una classe di numeri reali finiti od infiniti. Allora:

" Se g è una qualunque funzione subordinata da Λf ed a è un qualunque elemento della classe " Lm (g, u, x) ", dalla definizione di Lm per le funzioni plurivoche, si deduce, qualunque siano g ed a, che a è un numero della classe " Lm (f, u, x) ". (α).

Si supponga adunque che a sia un numero finito appartenente alla classe " Lm (f, u, x) ", e si consideri la funzione g che ad ogni valore y di u fa corrispondere il più grande numero di " $\lambda f y$ " eguale ad " $a - \text{dist}(a, fy)$ " oppure ad " $a + \text{dist}(a, fy)$ "; allora per l'ipotesi e per la ·2 si deduce che:

" g è una funzione subordinata da λf tale che per ogni valore y di u avviene che: $\text{mod}(a - gy) = \text{dist}(a, fy)$ ". (β).

Dall'ipotesi intorno ad a e dalla definizione di Lm per le funzioni plurivoche si deduce che se h, k sono quantità positive, allora, qualunque esse siano, esiste un elemento y di u non eguale ad x la cui distanza da x è minore di h e tale che " $\text{dist}(a, fy) < k$ ".

Per la (β) e per la definizione di Lm per le funzioni univoche si ha dunque:

" se a è un numero finito appartenente alla classe "Lm(f,u,x)", allora esiste una funzione g, subordinata da λf, tale che a sia un numero della classe " Lm (g, u, x) ". (γ).

Da (α) e (γ) si deduce che:

" Sono eguali le parti finite della classe " Lm (f, u, x) " e della classe somma dei valori limiti di tutte le funzioni subordinate da Λf definite nel campo u calcolati per il valore x (classe questa che indicherò con " $\cup$ Lm $[{}^{\backprime}\mathrm{C}\Lambda f, u, x]$ ") ". (1).

Si supponga ora che " $+\infty \,\epsilon\, \text{Lm}(f, u, x)$ ". Allora (§ 2, n. 3) ciò vuol dire che se h, k sono quantità positive, allora, qualunque esse siano, esiste una coppia (y, z) tale che y è un individuo di u non eguale ad x avente da x distanza minore di h, z è un numero di fy e " $z > k$ ". (δ).

Si consideri ora la funzione g che ad ogni valore y di u fa corrispondere il limite superiore di fy; allora g è una funzione subordinata da Λf tale che se y è un qualunque elemento di u sempre avviene che, preso ad arbitrio il numero z nella classe fy, " $gy \geqq z$ ". (ε).

Allora per la (δ) e per la definizione di Lm per le funzioni univoche si ha:

" Se $+\infty$ è un elemento della classe " $\text{Lm}(f, u, x)$ ", allora esiste una funzione g subordinata da Λf tale che $+\infty$ è un elemento della classe " $\text{Lm}(g, u, x)$ ". (ε).

In modo analogo si prova che:

" Se $-\infty$ è un elemento della classe " $\text{Lm}(f, u, x)$ ", allora esiste una funzione g subordinata da Λf tale che $-\infty$ è un elemento della classe " $\text{Lm}(g, u, x)$ ". (ς).

Dalle (α), (ε) e (ς) si deduce che:

" Sono eguali le parti infinite delle classi " $\text{Lm}(f, u, x)$ " e " $\cup \text{Lm}[{}^{\backprime}\text{C}\Lambda f, u, x]$ ". (2).

Da (1) e (2) si deduce il teorema nel caso delle funzioni plurivoche numeriche.

2°. Supponiamo ora che f sia una classe non vuota di vettori (v*) funzione definita nel campo u.

Allora si consideri un vettore costante i e per ogni valore y di u si ponga " $\varphi y = i \times f y$ "; allora φ è una funzione plurivoca numerica definita nel campo u per la quale vale il teorema, cioè:

$$\text{" Lm}(\varphi, u, x) = \cup \text{Lm}[{}^{\backprime}\text{C}\Lambda\varphi, u, x] \text{ ".} \qquad (\alpha).$$

Ma dalla definizione di Lm per le funzioni plurivoche si ha:

$$\text{Lm}(\varphi, u, x) = \text{Lm}(i \times f, u, x) = i \times \text{Lm}(f, u, x). \qquad (\beta).$$

D'altra parte si ha: $\text{C}\Lambda\varphi = i \times \text{C}\Lambda f,$ (γ)

cioè: " ogni funzione subordinata da φ è del tipo $i \times g$ ove g è una funzione subordinata da Λf, e viceversa ".

Invero il dire che γ è una funzione subordinata da $\Lambda\varphi$ equivale a dire che per ogni elemento y di u si ha " $\gamma y \,\epsilon\, \Lambda\varphi y$ ", od anche " per ogni elemento y di u si ha che " $\gamma y \,\epsilon\, i \times \Lambda f y$ ". (1).

D'altra parte il dire che g è una funzione subordinata da Λf equivale a dire che per ogni elemento y di u si ha " $g y \,\epsilon\, \Lambda f y$ " od anche che per ogni elemento y di u si ha " $i \times g y \,\epsilon\, i \times \Lambda f y$ ". (2).

Da (1) e (2) si deduce la (γ).

Per le (α), (β) e (γ) si ha allora successivamente:

$$\begin{aligned} i \times \text{Lm}(f, u, x) &= \text{Lm}(\varphi, u, x) = \cup \text{Lm}[{}^{\backprime}\text{C}\Lambda\varphi, u, x] = \\ &= \cup \text{Lm}[{}^{\backprime}i \times \text{C}\Lambda f, u, x] = i \times \cup \text{Lm}[{}^{\backprime}\text{C}\Lambda f, u, x], \end{aligned} \qquad (\delta)$$

da cui, per l'arbitrarietà di i, si deduce il teorema.

3°. Supponiamo che f sia una classe non vuota di punti (p*) funzione definita nel campo u.

Allora si consideri il punto costante O e per ogni valore y di u si ponga " $\varphi y = O - fy$ "; risulta che φ è una funzione plurivoca definita nel campo u per la quale vale il teorema, cioè:

$$\text{Lm}\,(\varphi, u, x) = \cup\, \text{Lm}\,[\text{`C}\,\Lambda\,\varphi, u, x]\,.$$

Ma dalla definizione di Lm per le funzioni plurivoche si ha:

$$\text{Lm}\,[\varphi, u, x] = \text{Lm}\,[O - f, u, x] = O - \text{Lm}\,(f, u, x)\,;$$

d'altra parte si ha:

$$\text{C}\,\Lambda\,\varphi = O - \text{C}\,\Lambda\,f\,,$$

che si dimostra in modo perfettamente analogo alla (γ) dell'alternativa precedente.

Dai risultati ottenuti si deduce il teorema procedendo come dianzi: precisamente sostituendo ad " $i\times$ ", nella (δ) del caso 2°, " $O -$ ".

4°. In modo perfettamente analogo si dimostra il teorema per ogni altro tipo di funzione plurivoca.

·31 *Nelle ipotesi della* ·3 *e se inoltre f è limitata si ha:*

$$\text{Lm}\,(f, u, x) = \cup\, \text{Lm}\,[\text{`C}\,\lambda\, f, u, x].$$

·32 *Nelle ipotesi della* ·31 *e se inoltre f è chiusa, cioè " $f = \lambda f$, si ha:*

$$\text{Lm}\,(f, u, x) = \cup\, \text{Lm}\,[\text{`C}\, f, u, x].$$

Sotto forma abbreviata la ·32 può enunciarsi anche così:

Sia f una figura variabile chiusa e limitata, allora i suoi valori limiti sono tutti e soli i valori limiti dei suoi elementi.

§ 4. — La classe dei limiti unici d'una funzione plurivoca.

1. — ·0 *Sia f una funzione plurivoca definita nel campo u e sia x un elemento di condensazione di u, allora definisco* " $\lim\,(f, u, x)$ " — da leggersi *classe dei limiti unici di f definita nel campo u calcolata per il valore x* — *come la classe formata da tutti e soli gli individui a per i quali esiste almeno una fun-*

zione subordinata da Λf, *e sia* g, *ammettente* a *come unico valore limite* (cioè come " limite ordinario "). In simboli:

$$u \in \mathrm{Cls}'\,\mathrm{p}^* \,.\, x \in \nabla u \,.\, f \in (\mathrm{Cls}'\,\mathrm{p}^* \sim \iota \wedge)\, \mathrm{f}\, u \,.\, \supset .$$
$$\lim(f, u, x) = [\imath\, \mathrm{Lm}(g, u, x)] \,|\, g' \mathrm{C}\Lambda f =$$
$$= a \ni \exists \{ g \ni [y \in u \,.\, \supset_y .\, gy \in \Lambda f y : a = \lim(g, u, x)] \}. \quad \mathrm{Def.}$$

·01 Sotto altra forma un po' abbreviata:

Sia f *una figura variabile definita nel campo* u, *allora la classe dei limiti unici di* f *è la classe i cui individui sono tutti e soli quelli che sono valori limiti unici* (cioè " limiti ordinari ") *degli elementi della minima figura chiusa a elementi finiti od infiniti contenente* f.

2. — ·0 Dalle definizioni adottate risulta subito che:

Hp 1· $. \supset .\ \lim(f, u, x) \supset \mathrm{Lm}(f, u, x)$, cioè:

Sia f *una funzione plurivoca definita nel campo* u *e sia* x *un elemento di condensazione di* u, *allora la classe dei limiti unici di* f *definita nel campo* u *calcolata per il valore* x *è sempre contenuta nella classe dei valori limiti di* f, *definita nello stesso campo calcolata per lo stesso valore.*

Ma, mentre per le funzioni univoche l'esistenza del limite unico porta come conseguenza che esso è il limite ordinario (secondo la definizione di O. Bonnet, v. *Bull. des sciences math.*, 1871, t. 2, p. 215), per il caso delle funzioni plurivoche ciò non è più vero e si può soltanto affermare che vale la 2. Quindi " possono esistere entrambe le classi " $\lim(f, u, x)$ " e " $\mathrm{Lm}(f, u, x)$ " senza essere eguali ", [mentre però non è mai vuota la classe " $\mathrm{Lm}(f, u, x)$ " può essere tale la classe " $\lim(f, u, x)$ "].

·1 *Esempio.* — Sia f la funzione plurivoca che ad ogni numero reale x fa corrispondere la classe composta dai due numeri $\sin(1/x)$ ed $\cos x$; allora, per proprietà pressochè evidenti e che saranno esattamente stabilite in un altro lavoro, si ha:

$\mathrm{Lm}(f, \mathrm{q}, 0) = -1 \vdash\!\dashv 1$ (cioè a tutti i numeri reali x tali che " $-1 \leqq x \leqq 1$ ");

$\lim(f, \mathrm{q}, 0) = \iota 1$ (cioè si compone del solo numero 1).

3. — *Sia* f *una funzione plurivoca definita nel campo* u *e sia* x *un elemento di condensazione finito di* u, *allora il dire che* a

è un elemento finito appartenente alla classe " lim (f, u, x) " *equivale a dire che data ad arbitrio la quantità positiva k esiste una quantità positiva h siffatta che, per ogni valore y di u non eguale ad x e la cui distanza da x sia minore di h, risulti* " dist $(a, fy) < k$ ".

E questa è, all'infuori della forma, la definizione di limite delle figure variabili adottata da G. PEANO fin dal 1887 (*Applic. geom.*, p. 302).

In simboli, tenendo presente la Def. 1. si ha:

$$u \in \text{Cls}'\text{q} . f \in (\text{Cls}'\text{q} \sim \iota \Lambda) \text{f} u . x \in \delta u . \text{Ɔ}:$$
$$a \in \text{q} \frown \lim(f, u, x) . = . \exists \{ g \ni [y \in u . \text{Ɔ}_y . gy \in \lambda fy : a \in \text{q} . a =$$
$$= \lim(g, u, x)] \} : = : a \in \text{q} . k \in \text{Q} . \text{Ɔ}_k . \exists \text{Q} \frown h \ni [y \in u \sim$$
$$\sim \iota x . \text{mod}(y - x) < h . \text{Ɔ}_y . \text{dist}(a, fy) < k].$$

Dim. — La dimostrazione è perfettamente analoga a quella della P. 3·3 del § 3 e quindi, per tirannia di spazio, si omette.

4. — Il legame fra i concetti espressi dai due simboli " Lm " e " lim ", cioè fra la definizione di " classe dei valori limiti " e di " classe dei limiti unici ", è chiarito dalle proposizioni seguenti:

·1 *Sia f una funzione plurivoca definita nel campo u e sia x un elemento di condensazione di u ed a un valore limite della f definita nel campo u calcolato per il valore x, allora esiste sempre una classe v appartenente ad u, avente x come elemento di condensazione, e tale che a è un individuo della classe dei limiti unici di f definita nel campo v calcolata per il valore x.*

In simboli:

$$u \in \text{Cls}'\text{p}^* . f \in (\text{Cls}'\text{p}^* \sim \iota \Lambda) \text{f} u . x \in \nabla u . a \in \text{Lm}(f, u, x) . \text{Ɔ} .$$
$$\exists \{ (\text{Cls}' u) \frown v \ni [x \in \nabla v . a \in \lim(f, v, x)] \}.$$

Come corollario si ha:

·2 *Sia f una funzione univoca definita nel campo u e sia x un elemento di condensazione di u ed a un qualunque individuo della classe* " Lm (f, u, x) ", *allora esiste sempre una classe v appartenente ad u avente x come elemento di condensazione e tale che* " $a = \lim(f, v, x)$ ".

In simboli:

$$u \in \text{Cls}'\text{p}^* . f \in \text{p}^* \text{f} u . x \in \nabla u . a \in \text{Lm}(f, u, x) . \text{Ɔ} .$$
$$\exists (\text{Cls}' u) \frown v \ni [x \in \nabla v . a = \lim(f, v, x)].$$

La proposizione ·2 è analoga ad un teorema di R. BETTAZZI (*Rend. Circ. Palermo*, 1892, t. VII, p. 173) e di G. SANNIA (*Mem. R. Acc. Scienze Torino*, 1915, v. 66, p. 4). Qui dimostro il teorema più generale ·1 per una via semplice e nuova.

Dim. — ·1 Faremo la dimostrazione nel caso in cui a ed x sono quantità finite.

1°. Supponiamo dapprima che f sia una funzione plurivoca numerica (cioè una classe non vuota di numeri reali (q*) variabile). Allora, essendo k una quantità positiva arbitraria, indichiamo con v_k la classe formata da tutti gli elementi y di u non eguali ad x e tali che " mod $(y - x) < k$ " e " dist$(a, fy) < k$ ".

Per la definizione di Lm e per l'ipotesi che a sia un individuo della classe " Lm (f, u, x) " risulta che v_k non è vuota. E se y è un qualunque elemento di v_k si ha " dist$(a, fy) < k$ ".

Indichiamo poi con v la somma logica di tutte le classi v_k al variare comunque di k nel campo delle quantità positive.

Da quanto precede risulta che " tale classe v esiste, che è contenuta in u e che x è un elemento della classe $\mathfrak{d}v$ ".

Occorre soffermarci un poco su quest'ultima affermazione, cioè che dalle ipotesi fatte risulta che " $x \,\epsilon\, \mathfrak{d}v$ ". Ma, infatti, per il significato di x e di a, essendo k una qualunque quantità positiva, si deduce che esiste un elemento y di u non eguale ad x e soddisfacente alle due condizioni seguenti:

$$\text{mod}\,(y - x) < k\,, \qquad \text{dist}\,(a, fy) < k.$$

Ma dalla definizione di v risulta che questo elemento y appartiene a v stesso. Dunque essendo k una qualunque quantità positiva esiste un elemento y di v (e quindi non eguale ad x) tale che " mod $(y - x) < k$ ", e quindi per la definizione di $\mathfrak{d}$ si deduce che " $x \,\epsilon\, \mathfrak{d}v$ ".

Poichè la classe v si compone di tutti e soltanto gli elementi delle classi v_k al variare di k nel campo delle quantità positive, risulta che, presa ad arbitrio la quantità positiva k, gli elementi y di v che soddisfano alla condizione " mod $(y - x) < k$ " non possono essere che gli elementi della classe v_k e perciò dovranno soddisfare anche alle altre condizioni relative a v_k, cioè non saranno eguali ad x ed inoltre " dist$(a, fy) < k$ ".

Ma allora, data ad arbitrio la quantità positiva k, esiste una quantità positiva — la k stessa — tale che, preso un qua-

lunque elemento y di v (e quindi diverso da x) soddisfacente alla condizione " $\mathrm{mod}(y - x) < k$ ", avvenga che " $\mathrm{dist}\,(a, fy) < k$ ". Ma, per il teorema stabilito al n. 3, ciò prova precisamente che " $a \in \lim\,(f, v, x)$ ", che è quanto volevasi dimostrare.

2°. Il teorema si estende alle altre funzioni plurivoche col procedimento seguìto nel § 3, n. 3.

·3 *Sia u una classe ed f una classe non vuota funzione definita nel campo u, sia x un elemento di condensazione di u ed a un valore limite di f definita nel campo u calcolato per il valore x; allora esiste una classe w contenuta in u ammettente x come elemento di condensazione ed una funzione g, trasformante ogni elemento y di w in un elemento della minima classe chiusa ad elementi finiti od infiniti contenente fy, tale che a è eguale al limite ordinario di g definita nel campo w calcolato per il valore x.*

In simboli, limitandosi a considerare gli elementi finiti e classi di numeri reali, si ha:

$$u \in \mathrm{Cls'q} \,.\, f \in (\mathrm{Cls'q} \sim \iota \Lambda)\,\mathrm{f}u \,.\, x \in \delta u \,.\, a \in \mathrm{q} \cap \mathrm{Lm}\,(f, u, x) \,.\supset .$$
$$\exists \,\}\,(w, g) \ni [w \in \mathrm{Cls'}\, u \,.\, x \in \delta w : y \in w \,.\supset_y .\, gy \in \lambda f y : a = \lim\,(g, w, x)]\,\{ .$$

Dim. — La proposizione è conseguenza immediata della 4·1 della 3. e della 1. di questo §.

Livorno, R. Accademia navale, 1926.

Risoluzione di un problema demografico.

Nota di FRANCESCO TRICOMI
presentata dal Socio naz. resid. Tommaso Boggio

1. — Si ode spesso ripetere che nei paesi a bassa natalità la percentuale dei giovani rispetto alla popolazione totale è relativamente piccola, mentre invece nei paesi ad alta natalità, qual'è p. es. il nostro, si verifica il fenomeno inverso. E che le cose, qualitativamente, debbano procedere effettivamente così, non riesce difficile persuadersi per poco che si rifletta sulla questione. Se però non ci si contenta di un esame così superficiale del problema, ma si desidera invece conoscere la precisa relazione quantitativa intercedente fra i due fenomeni: *natalità* e *legge di distribuzione della popolazione secondo l'età* (supposto nota la legge di mortalità) si riconosce subito che non è possibile procedere senza far ricorso a mezzi matematici di carattere elevato. Non deve pertanto sorprendere che lo studio di siffatta questione sia stato finora trascurato — per quanto mi consta — dai cultori di Statistica teorica, malgrado il grande interesse che può ovviamente presentare il confronto della curva di distribuzione dedotta teoricamente con quella effettiva, dedotta dai risultati dei censimenti o altre simili indagini. Invero è chiaro che tutti quei fenomeni demografici che, oltre la natalità e la mortalità ordinaria, hanno influenza sulla composizione della popolazione (emigrazione, guerre, ecc.) dovranno ripercuotersi sulle divergenze della curva effettiva da quella teorica.

La presente Nota è dedicata alla ricerca della suaccennata relazione quantitativa, ossia, più esattamente, alla risoluzione del seguente problema:

Un certo gruppo di popolazione di cui si conosce la legge di mortalità (supposta invariabile nel tempo che si considera) ha una data COMPOSIZIONE *all'origine dei tempi, ossia è nota la sua iniziale legge di distribuzione secondo le età; si conosce inoltre la legge*

con cui varia la sua NATALITÀ *nell'intervallo* (0, t): *Si chiede la composizione del gruppo al tempo* t, *cioè la forma della funzione* $\varphi(x, t)$ *tale che il prodotto* $100\,\varphi(x, t)\,dx$ *esprima il percento di popolazione del gruppo che, nell'istante* t, *ha età compresa fra* x *ed* $x + dx$.

Si vedrà come la determinazione della funzione φ dipenda dalla risoluzione di un'equazione integro-differenziale (a derivate parziali) che noi ricondurremo a quella di un'ordinaria equazione integrale di Volterra, di seconda specie.

2. — Indichiamo con $V(x)$ la *legge di sopravvivenza* del gruppo di popolazione che si considera, cioè supponiamo che di n nati-vivi ne arrivino $nV(x)$ all'età x; conseguentemente, scelto comunque nel nostro gruppo un sottogruppo di n persone aventi tutte la stessa età x, si avrà che di esse ne restano

$$n\left[1 + \frac{V'(x)}{V(x)}\,dx\right]$$

dopo trascorso il tempo dx. Indichiamo inoltre con $S(t)$ il numero totale dei componenti il nostro gruppo al tempo t. Con tali notazioni avremo che gli individui che, nell'istante t, hanno età compresa fra $x - dx$ ed x sono

$$S(t)\,\varphi(x - dx, t)\,dx,$$

mentre quelli che, nell'istante $t + dx$, hanno età compresa fra x ed $x + dx$ sono

$$S(t + dx)\,\varphi(x, t + dx)\,dx.$$

Ma questi secondi individui sono quelli di prima meno quelli che son morti nel frattempo; dunque si avrà l'equazione

$$S(t + dx)\,\varphi(x, t + dx)\,dx = S(t)\,\varphi(x - dx, t)\left[1 + \frac{V'(x)}{V(x)}\,dx\right]dx,$$

da cui, dividendo per dx e trascurando i termini d'ordine superiore al primo, si trae

$$S'(t)\,\varphi + S(t)\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{V'(x)}{V(x)}\,S(t)\,\varphi - S(t)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

cioè

$$\frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=\frac{V'(x)}{V(x)}-\frac{S'(t)}{S(t)}. \tag{1}$$

Otterremo una seconda equazione, necessaria per eliminare l'incognita ausiliare $S(t)$, facendo il bilancio degli aumenti e delle diminuzioni che si verificano nel numero dei componenti il nostro gruppo fra l'istante t e l'istante $t+dt$. Precisamente, se indichiamo con $N(t)$ il *tasso istantaneo di natalità*, se supponiamo cioè che — nell'intervallo di tempo indicato — da ogni n individui del nostro gruppo ne nascono (vivi) $n\,N(t)\,dt$, avremo che la variazione in aumento è data da

$$S(t)\,N(t)\,dt\,;$$

invece la variazione in diminuzione è data dalla somma delle morti che si verificano (con diversa frequenza) nei sottogruppi costituiti dagli individui di età compresa fra 0 e dx, fra dx e $2\,dx$, ecc. ...; essa è dunque data dal prodotto di dt per

$$-\int_0^1 S(t)\,\varphi(x,t)\,\frac{V'(x)}{V(x)}\,dx,$$

nell'ipotesi che si assuma come unità di misura dei tempi l'*età massima* (p. es. 100 anni) che possono raggiungere gli individui nel nostro gruppo, di guisa che si avrà

$$V(1)=0. \tag{2}$$

Segue da quanto sopra l'equazione

$$S(t+dt)=S(t)+\left\{S(t)\,N(t)+S(t)\int_0^1\frac{V'(x)}{V(x)}\,\varphi(x,t)\,dx\right\}dt,$$

da cui, a meno dei soliti termini d'ordine superiore, si trae

$$\frac{S'(t)}{S(t)}=N(t)+\int_0^1\frac{V'(x)}{V(x)}\,\varphi(x,t)\,dx. \tag{3}$$

Non resta ora che da eliminare S fra la (1) e la (3) e si ottiene così l'equazione integro-differenziale in φ:

$$\frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)+\int_0^1\frac{V'(x)}{V(x)}\,\varphi(x,t)\,dx=\frac{V'(x)}{V(x)}-N(t), \tag{4}$$

cui sono ovviamente da aggiungersi le condizioni al contorno

$$(5) \qquad \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \qquad \varphi(0, t) = N(t), \qquad \varphi(1, t) = 0,$$

avendo indicata con $\varphi_0(x)$ la data legge iniziale di distribuzione secondo le età. Notiamo infine che la funzione φ, per la sua stessa definizione, deve inoltre soddisfare alla condizione

$$(6) \qquad \int_0^1 \varphi(x, t)\, dx = 1.$$

3. — Per risolvere l'equazione (4) conviene riguardare in principio la S come una funzione nota e, conseguentemente, la (1) come un'equazione lineare alle derivate parziali del primo ordine, che scriveremo più opportunamente sotto la forma

$$(7) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi \left[\frac{V'(x)}{V(x)} - \frac{S'(t)}{S(t)} \right].$$

Poichè il sistema differenziale ordinario associato a questa equazione è

$$\frac{dx}{1} = \frac{dt}{1} = \frac{d\varphi}{\varphi\left(\frac{V'}{V} - \frac{S'}{S}\right)},$$

che ammette i due integrali indipendenti

$$x - t = \text{cost.} \qquad \text{e} \qquad \varphi \frac{S(t)}{V(x)} = \text{cost.},$$

ne consegue che tutte le soluzioni della (7) sono comprese nella formula

$$\varphi \frac{S(t)}{V(x)} = \Omega(x - t)$$

dove Ω denota una funzione arbitraria, e se ne deduce che

$$(8) \qquad \varphi(x, t) = \frac{V(x)}{S(t)} \Omega(x - t).$$

Ma la funzione φ deve soddisfare alle condizioni al contorno (5) [che si riducono alle due prime perchè la terza è identicamente

verificata in virtù della (2)], dunque, supponendo per semplicità che la funzione S prenda — al pari di V — il valore 1 per $t = 0$:

$$S(0) = 1, \tag{9}$$

dovranno reggere le due equazioni

$$\varphi_0(x) = V(x)\,\Omega(x), \qquad N(t) = \frac{1}{S(t)}\,\Omega(-t),$$

da cui si trae l'espressione della funzione Ω in tutto il campo che interessa:

$$\Omega(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_0(\xi)}{V(\xi)}, & (0 < \xi \leq 1) \\ S(-\xi)\,N(-\xi), & (-t \leq \xi < 0). \end{cases} \tag{10}$$

Notiamo che la funzione Ω risulta continua anche per $\xi = 0$ perchè le due funzioni date $\varphi_0(x)$ ed $N(t)$ dovranno manifestamente soddisfare alla condizione

$$\varphi_0(0) = N(0).$$

Ciò posto, poichè abbiamo ancora da determinare la funzione S, sostituiamo nella (3) al posto di φ l'espressione (8), avremo così l'equazione

$$\frac{S'(t)}{S(t)} = N(t) + \int_0^1 \frac{V'(x)}{S(t)}\,\Omega(x - t)\,dx,$$

ovvero, moltiplicando per $S(t)$ e tenendo conto della (10),

$$S'(t) = S(t)\,N(t) + \int_0^t V'(x)\,S(t-x)\,N(t-x)\,dx + \\ + \int_t^1 V'(x)\,\frac{\varphi_0(x-t)}{V(x-t)}\,dx,$$

da cui, cambiando nel primo integrale x in $t - x$ ed osservando che il secondo integrale è una funzione nota di t che possiamo indicare con una lettera sola, W per esempio:

$$W(t) = \int_t^1 V'(x)\,\frac{\varphi_0(x-t)}{V(x-t)}\,dx, \tag{11}$$

si ha

$$S'(t) = N(t)\, S(t) + \int_0^t V'(t-x)\, N(x)\, S(x)\, dx + W(t). \tag{12}$$

L'equazione ottenuta è una nuova equazione integro-differenziale, ma questa volta alle derivate ordinarie. Per risolverla introduciamo anzitutto un'incognita ausiliaria $\Psi(t)$ ponendo

$$S'(t) - N(t)\, S(t) = \Psi(t), \tag{13}$$

ed osserviamo quindi che la (13), riguardata come un'equazione differenziale lineare in Ψ, fornisce

$$S(t) = e^{\int_0^t N(u)\,du} \left[\int_0^t \Psi(\xi)\, e^{-\int_0^\xi N(u)\,du}\, d\xi + \text{cost.} \right],$$

o meglio, tenendo conto della (9),

$$S(t) = e^{\int_0^t N(u)\,du} \left[\int_0^t \Psi(\xi)\, e^{-\int_0^\xi N(u)\,du}\, d\xi + 1 \right]. \tag{14}$$

Sostituiamo ora l'espressione trovata nella (12), avremo così

$$\Psi(t) = \int_0^t V'(t-x)\, N(x)\, e^{\int_0^x N(u)\,du} \left[\int_0^x \Psi(\xi)\, e^{-\int_0^\xi N(u)\,du}\, d\xi + 1 \right] dx + W(t),$$

da cui segue l'equazione in Ψ

$$\Psi(t) - \int_0^t \Psi(\xi)\, e^{-\int_0^\xi N(u)\,du}\, d\xi \int_\xi^t V'(t-x)\, N(x)\, e^{\int_0^x N(u)\,du}\, dx =$$
$$= W(t) + \int_0^t V'(t-x)\, N(x)\, e^{\int_0^x N(u)\,du}\, dx,$$

ovvero

$$\Psi(t) - \int_0^t K(t,\xi)\, \Psi(\xi)\, d\xi = F(t), \tag{15}$$

avendo posto

$$\begin{cases} e^{-\int_0^\xi N(u)\,du} \int_\xi^t V'(t-x)\, N(x)\, e^{\int_0^x N(u)\,du}\, dx = K(t,\xi), \\ W(t) + \int_0^t V'(t-x)\, N(x)\, e^{\int_0^x N(u)\,du}\, dx = F(t). \end{cases} \tag{16}$$

In tal modo tutto è ridotto alla risoluzione dell'equazione di Volterra di seconda specie (15), e cioè ad un problema classico. Invero, tratta che sia l'espressione di Ψ da quest'equazione, la (14) fornisce subito la S e successivamente la (8) e la (10) forniscono φ.

Dimostriamo finalmente che la funzione φ tratta dalle equazioni precedenti soddisfa alla condizione (6). A tale scopo integriamo la (7) rispetto ad x fra 0 ed 1, avremo così

$$\varphi(1,t) - \varphi(0,t) + \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx = \int_0^1 \frac{V'(x)}{V(x)} \varphi(x,t)\, dx - \frac{S'(t)}{S(t)} \int_0^1 \varphi(x,t)\, dx,$$

da cui, tenendo conto della (3) e delle (5), si deduce

$$-N(t) + \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx = \frac{S'(t)}{S(t)} - N(t) - \frac{S'(t)}{S(t)} \int_0^1 \varphi(x,t)\, dx,$$

cioè

$$S(t) \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx + S'(t) \left[\int_0^1 \varphi(x,t)\, dx - 1 \right] = 0,$$

ovvero

$$\frac{d}{dt} \left\{ S(t) \left[\int_0^1 \varphi(x,t)\, dx - 1 \right] \right\} = 0.$$

La relazione ottenuta mostra che il prodotto

$$S(t) \left[\int_0^1 \varphi(x,t)\, dx - 1 \right]$$

è costante rispetto al tempo. Ma inizialmente la quantità entro parentesi quadra è nulla perchè la funzione data $\varphi_0(x) = \varphi(x,0)$ soddisferà evidentemente alla condizione (6), dunque dovrà aversi sempre

$$S(t) \left[\int_0^1 \varphi(x,t)\, dx - 1 \right] = 0,$$

dal che, non essendo la funzione $S(t)$ identicamente nulla, segue la (6).

4. — Le formule ottenute nel § precedente forniscono la completa risoluzione del problema demografico considerato e sotto una forma tale che, nei casi pratici, si può passare sen-

z'altro ai calcoli numerici. Invero la risoluzione numerica di un'equazione integrale di Volterra di seconda specie, è un problema non difficile per cui oggi si posseggono metodi efficienti (1).

Tuttavia merita di essere segnalato un caso particolare in cui le formule risolutive subiscono sostanziali semplificazioni e divengono immediatamente calcolabili numericamente. Alludiamo al caso in cui la legge di distribuzione della popolazione secondo le età si può considerare *indipendente dal tempo*, cioè la funzione φ dipende dalla sola x. In tal caso l'equazione (4) diviene semplicemente

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \int_0^1 \frac{V'(x)}{V(x)} \varphi(x)\, dx = \frac{V'(x)}{V(x)} - N(t)\,, \tag{17}$$

il che mostra anzitutto che *la natività dev'essere costante*:

$$N(t) = N_0\,.$$

Supposta verificata questa condizione, poniamo

$$\int_0^1 \frac{V'(x)}{V(x)} \varphi(x)\, dx + N_0 = k\,, \tag{18}$$

di guisa che la (17) potrà scriversi sotto la forma

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{V'(x)}{V(x)} - k$$

da cui, integrando, si trae

$$\varphi(x) = c\, V(x)\, e^{-kx}\,,$$

avendo indicata con c una costante arbitraria. Per determinare il valore di questa costante, sostituiamo l'espressione trovata nella (18), avremo così

$$c \int_0^1 V'(x)\, e^{-kx} dx + N_0 - k = 0\,,$$

---

(1) V. p. es. E. T. Whittaker, Roy. Soc. Proc. A *94* (1918), pag. 367.

equazione da cui, con un'integrazione per parti, si trae

$$c\left[V(x)\, e^{-kx}\right]_0^1 + kc\int_0^1 V(x)\, e^{-kx}\, dx + N_0 - k = 0\,,$$

ossia

$$-c + k\int_0^1 \varphi(x)\, dx + N_0 - k = 0\,,$$

ma, come ben sappiamo, dev'essere

$$\int_0^1 \varphi(x)\, dx = 1\,; \tag{19}$$

dunque resta semplicemente

$$c = N_0$$

e ne segue che

$$\varphi(x) = N_0\, V(x)\, e^{-kx}\,. \tag{20}$$

Resta finalmente da determinare la costante k, per lo che si utilizzerà la condizione (19) che dà luogo all'equazione trascendente in k:

$$\int_0^1 V(x)\, e^{-kx}\, dx = \frac{1}{N_0}\,, \tag{21}$$

la quale, qualunque sia il valore della costante essenzialmente positiva N_0, ha una ed una sola radice reale. Infatti, avendosi da un lato che

$$\frac{d}{dk}\int_0^1 V(x)\, e^{-kx}\, dx = -\int_0^1 V(x)\, x\, e^{-kx}\, dx < 0,$$

e dall'altro che

$$\int_0^1 V(x)\, e^{-kx}\, dx = V(\theta)\int_0^1 e^{-kx}\, dx = V(\theta)\,\frac{1-e^{-k}}{k}, \qquad (0 < \theta < 1);$$

il primo membro della (21) è una funzione sempre decrescente di k che varia da $+\infty$ a 0 quando k varia fra $-\infty$ e $+\infty$.

Da quanto sopra risulta inoltre che al crescere della natalità N_0 cresce anche k, ma, detti x_1 e x_2 ($x_1 < x_2$) due punti quali siansi dell'intervallo (0, 1), dalla (20) si ricava che

$$\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)} = \frac{V(x_1)}{V(x_2)} e^{k(x_2 - x_1)},$$

il che mostra che il rapporto $\varphi(x_1)/\varphi(x_2)$ è una funzione crescente di k; dunque al crescere della natalità tendono a prevalere le ordinate di $\varphi(x)$ corrispondenti ai minori valori di x, cioè la percentuale dei giovani rispetto alla popolazione totale tende ad aumentare.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

CLASSI UNITE

Adunanza del 21 Novembre 1926

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. GIUSEPPE PEANO
SOCIO ANZIANO

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci Grassi, Panetti, Sacco, Garelli;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci Patetta, Cian, Faggi, Luzio, Solari, Bertoni, Rondolino e Vidari che funge da Segretario.

Scusano l'assenza il Presidente Ruffini, il Vice-Presidente Parona e i Soci D'Ovidio, Guidi, Mattirolo, Somigliana, Repossi, De Sanctis, Brondi, Einaudi.

Il Presidente porge un saluto ai colleghi ora per la prima volta riuniti dopo le vacanze.

Letto ed approvato il verbale dell'adunanza precedente, si dà notizia: 1°) dei telegrammi inviati dal Presidente a S. E. il Capo del Governo per compiacersi con lui dello scampato pericolo in occasione dei due criminosi attentati del settembre e dell'ottobre scorsi, e del telegramma di risposta di S. E. il Ministro Fedele; 2°) del telegramma inviato dal Presidente a S. M. il Re in occasione della morte di S. A. I. e R. la Principessa Laetitia, e del telegramma di risposta del generale Cittadini; 3°) della deliberazione presa dal Consiglio di amministrazione in seduta del 12 maggio 1926, per la quale vengono assegnate ai Soci corrispondenti nei Rendiconti dell'Accademia

16 facciate per lavori di loro firma, riducendosi ai Soci nazionali la disponibilità a 32 facciate per lavori proprii e a 16 per lavori di terzi.

Il Presidente, procedendo al secondo oggetto posto all'ordine del giorno " Nomina della Commissione per il 24° Premio Bressa ", invita i Soci a fare la votazione in conformità del 2° comma dell'art. 1 Regolam. int. 14 maggio 1916, per il quale ogni Classe designa i proprii Commissarii separatamente.

Dopo la votazione a schede segrete, il Presidente fa, con l'assistenza del Segretario e del Socio Panetti, lo scrutinio, e proclama eletti a far parte della Commissione i Soci Peano, Sacco, Panetti per la Classe di scienze fisiche, Jannaccone, Luzio, Patetta per la Classe di scienze morali.

Il Socio Panetti chiede di parlare sull'argomento delle condizioni finanziarie dell'Accademia e sulla necessità di un contributo straordinario da parte del Ministero. Avuta la parola, illustra tale necessità con dati di bilancio e con il richiamo a urgenti lavori per l'edificio e per l'arredo dell'aula magna in occasione della prossima cerimonia inaugurale, e conclude il suo dire con la presentazione del seguente ordine del giorno, che viene approvato alla unanimità:

" La R. Accademia delle Scienze di Torino nella sua adunanza a Classi unite del 20 novembre, preso atto delle condizioni precarie del Bilancio, che, malgrado le dolorose limitazioni nella stampa dei lavori scientifici, già si delineano nel corrente anno,

" rilevata la necessità impellente di riparazioni all'edificio, che non si possono ulteriormente differire, e la evidente convenienza di provvedere ad un decoroso adattamento dei locali per le solennità Accademiche intese a porre in evidenza l'importanza della cultura scientifica, e richieste dal nuovo indirizzo della vita nazionale,

" rivolge istanza a S. E. il Ministro della Istruzione Pubblica, supremo tutore dell'attività culturale della Nazione, perchè

accordi all'Accademia un maggiore contributo fisso, o quanto meno un adeguato contributo straordinario per l'anno 1926-27, che le permetta di svolgere efficacemente la sua attività scientifica provvedendo alla dignitosa manutenzione dello storico palazzo che la ospita „.

Gli Accademici Segretari:
ORESTE MATTIROLO
GIOVANNI VIDARI

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 28 Novembre 1926

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Peano, Guidi, Parona, Grassi, Somigliana, Panetti, Sacco, Boggio, Garelli e il Segretario Mattirolo.

Scusano l'assenza i Soci: Pochettino, Ponzio, Repossi e D'Ovidio.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Socio Sacco fa omaggio di un suo lavoro sulla *Galleria del Drink* nella Valle d'Aosta, considerata dal punto di vista della geologia. La Galleria della lunghezza di oltre 6 chilom. (precisamente 6033 m.) fa comunicare (alla quota di m. 1548 circa) la Valle d'Aosta (Dora Baltea) colla Valle di Cogne (Grand'Eyva); grandioso lavoro che sta in rapporto coi giacimenti della Magnetite di Cogne e che serve al trasporto di detto materiale alle officine di Aosta. Il Socio Sacco fa rilevare l'importanza geologica di tale opera che egli ha potuto seguire durante il lavoro di perforazione e di cui presenta nella sua Nota il profilo geologico longitudinale sull'asse della Galleria e il Diagramma delle temperature riscontrate.

Il Socio Vice Presidente PARONA presenta quindi in omaggio due sue Note dai titoli:

1) *Il Gebel Tripolitano e la sua fronte sulla Gefara*, lavoro nel quale Egli espone le sue vedute sulla geologia della regione.

2) *Ricerche sulle Rudiste e su altri fossili del Cretaceo superiore del Carso Goriziano e dell'Istria.*

Questo studio (splendidamente illustrato da N. VI grandi tavole) illumina sia la geologia, sia la Fauna di *Rudiste* e di *Radioliti* dei due orizzonti geologici di quella regione, il *Turoniano* cioè e il *Senoniano.*

Lo stesso Socio PARONA presenta per la inserzione negli *Atti* un lavoro del signor Giambattista DAL PIAZ che ha per titolo: *Descrizione di un nuovo sottogenere di "Anthracotherium".*

Il lavoro del signor DEL PIAZ viene accolto per la pubblicazione negli *Atti.*

LETTURE

Descrizione di un nuovo sottogenere di "Anthracotherium".

Nota di GIAMBATTISTA DAL PIAZ
presentata dal Socio nazionale residente C. F. Parona

Ancora nel 1874 il KOWALEWSKY (1) aveva osservato che le diverse forme riunite nel genere *Anthracotherium* CUVIER si possono separare in due gruppi ben distinti a seconda dello sviluppo relativo delle dita laterali in confronto alle dita mediane.

L'Autore sopraricordato ebbe modo di esaminare un 2° metacarpale di Antracoterio, proveniente da Bumbach (Cantone di Berna) e che doveva esser appartenuto ad un individuo di taglia poco inferiore a quella di un moderno ippopotamo. Il pezzo in discorso raggiunge in lunghezza alcuni terzi metacarpali di Cadibona, S. Antonin e Rochette (Losanna) e dimostra chiaramente che la specie bernese possedeva le quattro dita molto robuste e, ciò che più conta, tutte sviluppate in modo pressochè eguale, come succede ad esempio presso gli ippopotami viventi.

Ma le osservazioni di KOWALEWSKY non si limitano a questo singolo esemplare. Egli ricorda anche un altro secondo metacarpale, proveniente da Digoin (Saône-Loira) e illustrato dal BLAINVILLE, e alcune ossa dell'arto anteriore provenienti da una località sconosciuta dell'Alvernia (KOWALEWSKY, op. cit., tav. XI, figg. 37, 52, 54), che riferisce, son parole sue, " alla stessa specie o, se nuove scoperte la dovessero suddividere in più specie, al gruppo di Antracoteri che possedeva le quattro dita molto sviluppate e all'incirca di eguale grandezza ".

Questo concetto, di gran lunga il più essenziale che sia stato finora formulato per la sistematica del genere *Anthracotherium*, fu ribadito dallo STEHLIN (2), che diede inoltre un nome scientifico (*A. bumbachense*) ai resti descritti da KOWALEWSKY.

---

(1) KOWALEWSKY, *Monographie der Gattung Anthracotherium.* " Palaeontographica ", Cassel, Band. XXII, 1874, pp. 306, 307, 323, 324, ecc.

(2) STEHLIN, *Zur Revision der europäischen Anthracotherien.* " Verhand. d. Naturforsch. Gesell. in Basel ", Band XXI, p. 168.

In una lettera datata 19 giugno 1926 il chiaro paleontologo svizzero molto gentilmente mi comunica di aver avuto modo di constatare, nel corso della sua lunga esperienza, che gli Antracoteri sono molto più differenziati nella struttura dei piedi che in quella dei denti, i quali ultimi da soli non sono sufficienti per una trattazione tassonomica naturale e definitiva.

Senza dubbio il carattere delle dimensioni relative delle dita laterali in confronto a quelle mediane esorbita non solo l'àmbito di una specie, ma perfino quello di un sottogenere, però, date le nostre scarse cognizioni su quanto riguarda gli arti di alcune forme di *Anthracotherium*, credo che almeno per il momento non sia il caso di creare un genere nuovo. Istituendo infatti una simile distinzione si sarebbe molto imbarazzati a risolvere il problema presentato dall'*A. dalmatinum* MEYER, del quale, per quanto mi sappia, s'ignora ancora completamente la struttura dei piedi, destinati a riservare per la primitività dell'animale delle interessanti sorprese. Lo stesso si dica per talune forme raggruppate presentemente nella serie anisodattila.

L'istituzione di un semplice sottogenere invece permette di introdurre i più estesi e dettagliati concetti tassonomici senza complicare oltre la già difficile classificazione degli Antracoteri europei. Con questi criteri passo senz'altro alla descrizione seguente:

Subgenus *Isodactylus* nobis.

Specie tipica: *Anthracotherium bumbachense* STEHLIN.

Località tipica: Bumbach (Cantone di Berna).

Livello cronologico: parte più profonda dell'oligocene medio (Villebramand, Klein Blauen).

Distribuzione geografica e cronologica: Bumbach (Cantone di Berna); Digoin (Saône-Loira) e una località sconosciuta dell'Alvernia. — Come si è detto, gli Antracoteri isodattili sono caratteristici dell'oligocene medio più profondo, mancando del tutto nei livelli superiori.

Diagnosi: caratteri del genere; dita laterali fortemente sviluppate, lunghe quasi quanto le dita mediane.

Materiale illustrato: il KOWALEWSKY illustrò il seguente materiale, rinvenuto a Bumbach:

un secondo metacarpale (pp. 306-307, taf. XI, fig. 46),
un quarto metatarsale (p. 332, taf. XI, figg. 55-55*a*),
uno scafoide (p. 298, taf. XI, fig. 38),
un piramidale (p. 301, taf. XI, fig. 45),
un pisiforme (p. 302, taf. XI, fig. 58),
un cuboide (p. 313, taf. XI, fig. 44),
alcune falangi (p. 325 e segg.),

e alcune ossa provenienti dall'Alvernia:

un semilunare (p. 300, taf. XI, fig. 37),
alcune falangi (p. 326 ecc., taf. XI, figg. 52-54).

Il Blainville (*Anthrac.*, pl. II) figurò un frammento di secondo metacarpale, un terzo metatarsale destro e alcuni denti trovati presso Digoin (Saône-Loira). Successivamente venne ancora alla luce qualche avanzo molto incompleto.

A mostrar meglio le differenti proporzioni tra le dita laterali e le mediane che corrono nei due gruppi di Antracoteri riporterò alcune misure tratte da Kowalewsky (op. cit.):

2° metacarpale di Bumbach = 114 mm.
3° " di Cadibona, S. Antonin, Rochette, rispettivamente = 112, 130 e 104 mm.
5° " di Cadibona = 58 mm.
2° metatarsale di Rochette = 72 mm.
3° " di Rochette = 105? mm.
3° " di S. Antonin = 133 m.
4° " di Rochette = 105 mm.
4° " (Blainv. Anthr. Pl. II) = 134 mm.
4° " di Bumbach = 129.

Da questi dati si rileva come l'animale di Bumbach e Digoin, anche se di statura un po' più forte delle forme di Cadibona e Rochette, mostri tuttavia in modo evidentissimo uno sviluppo molto superiore delle dita laterali in confronto a quelle di mezzo. — (Si confronti tra di loro i vari metatarsali e poi il 2° metacarpale di Bumbach con il 5° metacarpale di Cadibona, tenendo presente che nel genere *Anthracotherium* queste due ultime ossa sono sempre pressochè simmetriche nelle dimensioni).

OSSERVAZIONI: non si sa ancora perfettamente se il grande Antracoterio isodattilo si differenzi o no nei caratteri dentari dalle specie della serie anisodattila. A Digoin sono stati trovati dei molari superiori molto simili a quelli corrispondenti di *A. magnum* o meglio ancora, come disse TELLER (op. cit., p. 81), a quelli di *A. illyricum*, che è però una forma sicuramente anisodattila. Ad ogni modo, osserva STEHLIN, non è il caso di dare troppa importanza a delle differenze odontologiche di dettaglio.

Per mio conto aggiungerò che nell'Istituto di Geologia di Torino si conserva una numerosa serie di molari superiori di *A. magnum*, i quali mostrano delle significative differenze individuali tanto nella grandezza, come nella forma del perimetro, nello sviluppo delle cuspidi, dei tubercoli e degli spigoli, ecc. Da tutto questo risulta ben chiaro che i caratteri della dentatura rivestono per il nostro genere poca importanza sistematica, che invece è massima nelle diverse particolarità di conformazione degli arti.

Secondo STEHLIN l'*A. bumbachense* (*s. l.*) non si troverebbe mai in compagnia delle forme anisodattile, essendo limitato all'oligocene medio inferiore, mentre le altre si presenterebbero in livelli sempre alquanto più giovani. Con il nuovo riordinamento dell'oligocene italiano (1) i giacimenti ad *Anthracotherium* di Cassinelle (Liguria) e di Agnana (Calabria) vengono riportati al Lattorfiano, cioè alla parte più bassa del periodo e allora, se le supposizioni di STEHLIN sono, come sembrerebbe, rispondenti a realtà, i resti di *Anthracotherium* delle due località sopraricordate non possono che appartenere ad una specie del sottogenere *Isodactylus* anzichè all'*A. magnum* di Cadibona, anisodattilo tipico e riportato cronologicamente al Cattiano.

L'unica specie descritta per la serie isodattila rimane l'*A. (Isodactylus) bumbachense* STEHLIN (op. cit.). Però i resti di Bumbach non coincidono perfettamente con quelli di Digoin e dell'Alvernia. Ad esempio il 4° metatarsale di Digoin è proporzionalmente più largo di quello di Bumbach. I resti trovati in Alvernia indicano un animale ancora maggiore di quello di Bumbach e Digoin. Molto probabilmente si tratta di specie di-

(1) Secondo le conclusioni di SILVESTRI e ROVERETO. Consulta il *Trattato di Geologia* del PARONA, 1925, p. 536 e tabella a p. 543.

verse, ma per il momento il più che si può fare è il riunire tutto il materiale del gruppo anisodattilo, non proveniente dalla località tipica, sotto la denominazione di *A.* cfr. *bumbachense* STEHLIN.

Per quanto riguarda la serie anisodattila, conosciamo in modo più o meno perfetto la struttura degli arti di parecchie specie. KOWALEWSKY ci rivelò quella dell'*A. magnum* e dell'*A. valdense*, TELLER quella dell'*A. illyricum* e lo scrivente descriverà in un prossimo lavoro quella dell'*A. monsvialense*, ecc.

Sul significato filogenetico del sottogenere *Isodactylus* non si può dir molto, essendoci ancora sconosciuti i suoi ancestrali. Purtroppo l'*A. dalmatinum*, che in questo senso potrebbe fornire dati di primissima importanza, non ha lasciato alcun resto relativo agli arti, sufficiente per farlo assegnare a questo piuttostochè all'altro gruppo. Non crederei troppo azzardato il supporre che la specie dalmata (di M. Promina) fosse di tipo isodattilo e progenitrice più o meno diretta degli altri Antracoteri. In un primo tempo sarebbero esistite forme con le dita tutte pressapoco di eguale lunghezza, a cui avrebbero fatto seguito le forme con le dita laterali fortemente ridotte, caratteristiche dei livelli superiori dell'oligocene. L'*A. bumbachense* in causa della sua forte statura non è però da considerarsi come il vero predecessore dell'*A. magnum* ed affini, ma soltanto come un ramo laterale del *phylum* che successivamente terminò con i grossi Antracoteri anisodattili.

Istituto Geologico.
Torino, 22 novembre 1926.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 12 Dicembre 1926

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: PARONA Vice Presidente, PEANO, SOMIGLIANA, PONZIO, SACCO, HERLITZKA, REPOSSI e il Segretario MATTIROLO.

Scusano l'assenza i Soci: MAJORANA e D'OVIDIO.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che risulta approvato, senza osservazioni.

Non essendovi presentazione, nè di Libri in omaggio, nè di Note per gli *Atti*, il Presidente dà la parola al Socio PEANO, il quale esprime il desiderio che venga aumentata la dotazione di pagine che i Soci possono accordare ai non Soci per le pubblicazioni negli *Atti*. Il Presidente fa osservare che la questione non può essere risolta altro che dal Consiglio di Amministrazione; ma intanto ricorda al Socio PEANO che i calcoli fatti dal nostro Tesoriere, già forse fin troppo ottimisti, sul carico che le pubblicazioni dei non Soci possono portare sul bilancio accademico difficilmente consentiranno di accogliere il desiderio del Socio PEANO.

Il Socio PEANO fa quindi osservare che l'Accademia non possiede che l'edizione 1888 della Enciclopedia Britannica e che, dopo quell'epoca, si sono fatte parecchie edizioni e oggi siamo

alla XII, che sta pubblicandosi. Il Prof. PEANO ricorda inoltre che le Biblioteche di Torino non posseggono altro che Edizioni già sorpassate, e che sarebbe bene che la nostra Accademia acquistasse l'edizione odierna, della quale egli presenta il programma e riferisce sul prezzo che non potrà essere superiore alle lire 2600. Il Socio PONZIO fa osservare che l'Accademia, come corpo scientifico, potrebbe anche facilmente ottenere un ribasso sul prezzo.

Il Presidente risponde al Socio PEANO che egli porterà nel Consiglio la proposta d'acquisto.

Adunanza del 26 Dicembre 1926

PRESIDENZA DEL SENATORE ENRICO D'OVIDIO
SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Soci: PEANO, GRASSI, PANETTI, HERLITZKA, BOGGIO e il Segretario MATTIROLO.

Scusano l'assenza i Soci: PARONA Vice Presidente, SOMIGLIANA, GUIDI e RUFFINI Presidente.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che risulta approvato senza osservazioni.

Non essendovi comunicazioni speciali, il Presidente dà la parola al Socio HERLITZKA, il quale presenta in omaggio all'Accademia il volume 1922-24 (che è il III volume della serie seconda) delle *Ricerche sperimentali* pubblicate sotto la sua direzione dal Laboratorio di Fisiologia della R. Università.

Il Socio Segretario presenta quindi in omaggio una sua Nota dal titolo: *Che cosa è la Synthetospora di A. P. Morgan*. Questo Genere di Funghi descritto nell'anno 1892 dal celebre Micologo americano, e che dopo questo anno non era più stato osservato, fu ritrovato dal MATTIROLO fra materiali di funghi

ipogei avuti dal sig. Klika di Praga. Studiando il ciclo di sviluppo di questo rarissimo micete parassita, potè dimostrare che lo stesso era già stato osservato nell'anno 1833 dal Walroth nel volume II della *Flora Cryptogamica Germanica*. Il lavoro è stato pubblicato nel giornale *Mycologìa* di Praga.

Il Presidente, ricordando che questa è l'ultima adunanza che l'Accademia tiene nell'anno 1926, chiude l'adunanza augurando ai Soci felice e prospero l'anno che sta per sorgere.

Adunanza del 9 Gennaio 1927

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Guidi, Parona Vice Presidente, Grassi, Somigliana, Panetti, Ponzio, Sacco, Majorana, Pochettino, Garelli, Repossi e il Segretario Mattirolo.

Il Segretario legge il verbale dell'adunanza precedente, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Presidente comunica all'adunanza che, secondo quanto già era stato preventivamente deliberato, e dietro accordi recenti col Generale Aiutante di Campo di S. A. R. il Principe Ereditario, la seduta inaugurale dell'anno accademico 1927 avrà luogo il giorno 30 del corr. mese di gennaio alle ore 10 $^{1}/_{2}$ e che la Presidenza sta concertando le modalità opportune perchè tale solennità abbia a riescire degna delle tradizioni accademiche.

Il discorso ufficiale sarà tenuto dal Socio Direttore della Classe Somigliana e sarà dedicato alla rievocazione di Alessandro Volta di cui ricorre in questo anno il centenario della nascita.

Il Socio Sacco fa omaggio dell'annata 1926 del Periodico *Urania* da lui diretto, omaggio che è nello stesso tempo atto

di grato animo per l'aiuto di consultazione delle pubblicazioni di cui fu larga l'Accademia al redattore del Periodico.

Il Socio SOMIGLIANA fa omaggio del " Bollettino N. 6 della Unione internazionale Geodetica e Geofisica „ e ne fa risaltare l'importanza.

Il Socio D'OVIDIO presenta quindi in dono per la Biblioteca accademica, nel nome del prof. Giuseppe BERNARDI, l'opuscolo *Tavola dei Cubi e dei Tripli dei quadrati dei numeri interi sino a 1000*, facendo rilevare la pratica utilità di essa e la diligenza delle spiegazioni del benemerito Autore.

Il Socio GUIDI offre all'Accademia una sua relazione dal titolo: *Studi sperimentali su costruzioni in cemento armato*; pubblicazione comparsa nel " Rendiconto dell'XI Riunione dell'Associazione italiana per gli Studi sui materiali da Costruzione „. Egli discorre di una serie di esperienze su materiali di costruzione compiutesi, sotto la sua direzione, durante l'ultima Esposizione di Architettura tenutasi in Torino nel decorso anno. Tali esperienze, al finanziamento delle quali hanno contribuito impresarii costruttori, fabbricanti di laterizii, produttori di cemento, si occuparono allo studio di nuovi tipi di solai in cemento, di costruzioni antisismiche; ma specialmente si interessarono di studiare le deformazioni e gli spostamenti che possono subire in modo particolare le dighe ad arco di cemento armato durante e dopo la loro costruzione. Egli fa rilevare che i risultati praticamente ottenuti concordano in modo perfetto e soddisfacentissimo con i calcoli di Gabinetto. Descrive quindi le modalità degli esperimenti.

Il Socio MAJORANA presenta una sua Nota dal titolo: *Su di una rappresentazione geometrica del trascinamento della luce per parte dei mezzi in moto*. Egli riferisce i risultati delle sue esperienze per spiegare i fenomeni che presenta la luce quando si propaga in mezzi varii e quando questi mezzi si trovano in movimento. Egli discute brevemente le varie teorie che riguardano e cercano di spiegare il fenomeno del trascinamento della

luce in relazione ai concetti della teoria della relatività, della teoria ondulatoria e della così detta teoria balistica, che egli colle sue esperienze intende appoggiare, quantunque non ritenga acora definitivamente risolto il problema dal punto di vista teorico.

Il Socio GARELLI presenta infine una Nota da lui redatta in unione al D[r] Ernesto MONATH, *Determinazioni crioscopiche sopra soluzioni di gaz*, e brevemente ne discorre facendo rilevare che i gaz Elio ed Argon non si sciolgono in modo apprezzabile alla pressione atmosferica nei solventi da lui esaminati; e che il bromuro stannico non discioglie sensibilmente i gaz esaminati, ciò che sta certamente anche in relazione con il suo punto di fusione già abbastanza alto.

LETTURE

Determinazioni crioscopiche sopra soluzioni di gas.

Nota 3ª del Socio FELICE GARELLI
e del Dott. ERNESTO MONATH

Proseguendo le ricerche sperimentali i cui risultati furono comunicati a questa Accademia lo scorso anno, le abbiamo estese ai gas argo ed elio, impiegando, oltre ai solventi acqua, acido acetico glaciale, acido formico, benzolo, nitrobenzolo, dimetilanilina, cicloesano, bromoformio, già indicati nelle due precedenti Note, anche l'acido solforico monoidrato, ed il tetrabromuro stannico. Abbiamo pensato che quest'ultimo solvente, per la sua costante molecolare crioscopica molto elevata (280), avrebbe svelato facilmente delle solubilità anche minime dei gas presi in esame.

Quanto all'argo, già *a priori* si poteva ritenere ch'esso sarebbe stato quasi insolubile nei solventi, specialmente organici. Per quanto si tratti di elemento inattivo per eccellenza, tuttavia si è scoperto che esso può formare con l'acqua degli idrati, i quali esistono però soltanto a bassissime temperature e sotto forte pressione (VILLARD, " C. R. de l'Académie des Sciences ", *123*, 377, 1896; DE FORCRAND, " C. R. de l'Académie des Sciences ", *176*, 355, 1923). Lo stesso dicasi del néon e del krypton. Data la sensibilità del metodo crioscopico non era escluso che esso riuscisse ad indicare un'eventuale tendenza dell'argo a legarsi, per quanto in modo estremamente labile, con l'acqua od altri solventi.

Il gas argo sul quale abbiamo sperimentato conteneva 98 % di argo, ed il 2 % era costituito quasi interamente da azoto.

Quest'ultimo gas non poteva certo influire in grado sensibile sui risultati, perchè gli abbassamenti crioscopici che esso produce nei diversi solventi sono molto piccoli, come risulta dalla nostra precedente comunicazione e dalla presente Nota: e pertanto i $^{2}/_{100}$ dei valori trovati sono addirittura inapprezzabili.

Per l'elio abbiamo già comunicato ch'esso non produce abbassamenti crioscopici sensibili gorgogliando attraverso i solventi: nitrobenzolo, benzolo, bromoformio, cicloesano, acido acetico e acido formico. Lo stesso è risultato dalle nostre ultime esperienze con acqua, acido solforico monoidrato, bromuro stannico.

Gli stessi risultati negativi abbiamo ottenuto con il gas argo. In nessuno dei solventi menzionati abbiamo potuto constatare il menomo indizio di abbassamento del punto di congelamento. Abbiamo alternato le correnti gassose di argo e di elio; il punto di congelamento o rimaneva costante o si innalzava di uno a tre centesimi di grado, per depurazione del solvente, come già si stabilì nelle nostre Note precedenti. Infatti, scacciando il gas per riscaldamento, il punto di congelamento rimaneva costante. Così, facendo gorgogliare una corrente di azoto, si osservavano abbassamenti crioscopici corrispondenti alla solubilità dell'azoto nel rispettivo solvente, determinato per altra via. Il punto di congelazione in corrente di argo e rispettivamente di elio era cioè identico a quello del solvente puro.

Risulta adunque che i gas elio ed argo non si sciolgono alla pressione atmosferica, nei solventi esaminati, in modo apprezzabile.

Esperienze in bromuro stannico. — Il tetrabromuro di stagno del quale disponevamo, ci venne fornito dalla ditta Kahlbaum. Esso venne ricristallizzato ed allora fondeva a 30°,45. Abbiamo determinato il suo punto di solidificazione in corrente, oltrechè di argo e di elio, dei seguenti gas: azoto, ossido di carbonio, ossido di azoto, acetilene. Malgrado l'elevata costante crioscopica del bromuro stannico solo l'acetilene produceva un abbassamento del punto di congelamento apprezzabile, e che fu determinato, in ripetuti esperimenti, uguale a 0°,135.

A questo abbassamento corrisponde una concentrazione della soluzione satura di acetilene in bromuro stannico, alla tempe-

ratura di congelamento di questo (30°,45), uguale a gr. 0,0128 per 100 gr. di solvente. Solubilità, come si vede, molto inferiore a quella da noi determinata per l'acetilene negli altri solventi sperimentati.

Il bromuro stannico adunque non discioglie sensibilmente i gas esaminati: ciò è certamente anche in relazione con il suo punto di fusione già abbastanza alto.

Su di una rappresentazione geometrica del trascinamento della luce per parte dei mezzi in moto.

Nota del Socio nazionale residente QUIRINO MAJORANA

La velocità della luce in un mezzo trasparente, moventesi nella direzione del raggio, per un osservatore fisso, rimane accresciuta o diminuita a seconda che il senso del movimento del mezzo coincide o è contrario a quello della propagazione luminosa. Se diciamo V la velocità della luce nel vuoto, V_1 quella nel mezzo considerato, supposto in quiete, V_2 quella della luce nel mezzo dotato della velocità v, è noto che:

$$V_2 = V_1 \pm \theta v ,$$

dove θ è il coefficiente di trascinamento di Fresnel-Fizeau espresso dalla relazione:

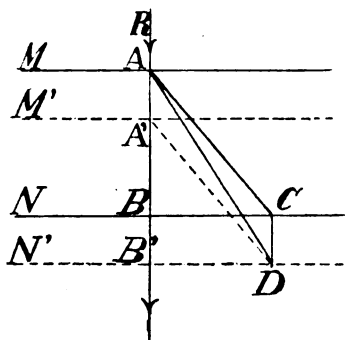
$$\theta = 1 - \frac{1}{n^2} ,$$

dove n è l'indice di rifrazione del mezzo.

Questa formula, che era già stata stabilita da Fresnel, partendo da considerazioni sulla densità dell'etere, e supponendo che tale densità si accrescesse nell'interno della materia, fu verificata sperimentalmente per la prima volta da Fizeau, il quale ottenne, nel caso dell'acqua, per θ, il valore di 0,434 che è in ottimo accordo con la formula stessa.

Oltre che dalla concezione di Fresnel, e dalla esperienza diretta, la formula trascritta ha ricevuto gran credito da ragionamenti di altra natura; partendo cioè dalla teoria elettromagnetica, o infine ammettendo la teoria della relatività di Einstein.

Nel momento attuale, in cui una revisione di molte fra le teorie fisiche fondamentali si rende necessaria, specialmente per quanto concerne le applicazioni o le conseguenze della teoria dei quanti; ed in cui si è forse accennato, più o meno direttamente, ad un ritorno alla teoria emissiva della luce (teoria balistica); pur non avendo ragioni soddisfacenti per dare sufficiente credito a tale teoria, ho pensato di ricercare una interpretazione diversa del fenomeno del trascinamento Fresnel-Fizeau, al quale la riportata formula si riferisce.

Non riporto per esteso i ragionamenti, forse non del tutto rigorosi, che mi hanno condotto al risultato più sotto indicato. E mi limiterò principalmente a mostrare, come una certa costruzione geometrica corrisponde, con grande approssimazione, al significato di quella formula. Sia MN una lastra a faccie piane e parallele, trasparente e di indice di rifrazione n, sulla quale un raggio R di luce penetra normalmente alle sue faccie. Se si suppone la lastra MN in quiete, si ha:

$$n = \frac{V}{V_1}.$$

Se invece la lastra è dotata di un moto secondo il raggio R e con velocità v, una vibrazione di R che è entrata nella lastra nel punto A, ne esce poi dal punto B, quando questo, in conseguenza del movimento di assieme della lastra, si sarà portato in B'. Conducasi ora AC tale che

$$\frac{AC}{AB} = \frac{V}{V_1} = n$$

ed inoltre $B'D$ parallela a BC, e CD parallela a BB'. Congiungasi poi A con D.

Nell'interno della lastra, in conseguenza del moto di questa, la luce avrà camminato con velocità maggiore. E propriamente, facciamo l'ipotesi che tale nuova velocità V_2 sia tale da soddisfare alla relazione

$$\frac{AD}{AB'} = \frac{V}{V_2}.$$

Si comprende facilmente che col crescere della velocità v della lastra, tale rapporto tende all'unità, e così pure l'indice di rifrazione della sostanza.

Vogliamo dimostrare che la costruzione indicata e l'ipotesi formulata portano a stabilire per V_2, con grande approssimazione, lo stesso valore che è dato dalla formula Fresnel-Fizeau.

Dalla figura, oltre quelle già scritte, si hanno le seguenti relazioni:

$$\frac{AB'}{AB' - AB} = \frac{V_2}{v},$$

e cioè:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{V_2}{V_2 - v}.$$

Da esse si ricava anche:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{V}{V_2 - v}.$$

Si ha inoltre:

$$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AB'}^2,$$

ossia:

$$\left(\frac{AC}{AB}\right)^2 - 1 = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 - \left(\frac{AB'}{AB}\right)^2.$$

Nella quale, sostituendo i tre rapporti già trovati più sopra, si ha:

$$\frac{V^2}{V_1^2} - 1 = \frac{V^2}{(V_2 - v)^2} - \frac{V_2^2}{(V_2 - v)^2}.$$

Cioè:

$$V^2 V_2^2 - 2v(V^2 - V_1^2) V_2 + v^2 (V^2 - V_1^2) - V^2 V_1^2 = 0.$$

La quale, risoluta rispetto a V_2, e tenendo conto che

$$\frac{V}{V_1} = n,$$

dà:

$$V_2 = v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + V_1 \sqrt{1 - \frac{v^2}{V_1^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}\right)},$$

dove si è dato il segno positivo al radicale, perchè V_2 è positivo.

Questa espressione, che è rigorosa, si semplifica sviluppando in serie il radicale e trascurando in questo sviluppo termini superiori al secondo in v/V_1:

$$V_2 = V_1 + v\left[1 - \frac{1}{n^2} - \frac{v}{2V_1}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}\right)\right].$$

In tale relazione, il terzo termine fra parentesi è piccolissimo rispetto ai primi due. Trascurandolo, si ricade esattamente nella formula di Fresnel-Fizeau:

$$V_2 = V_1 + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Alla costruzione grafica indicata, che conduce in modo non del tutto esatto, ma con grandissima approssimazione, agli stessi resultati della formula di Fresnel, e che interpreta ottimamente e con precisione più che sufficiente i resultati dell'esperienza di Fizeau, io non voglio dare un significato superiore a quello di una semplice rappresentazione geometrica.

Tuttavia debbo dire, che sono stato condotto ad immaginarla pensando ad una possibile natura balistica della luce. Se si suppone questa costituita da minutissimi projettili, viaggianti sempre con la stessa velocità, e che tali projettili debbano traversare una folla di particelle (gli ultimi costituenti della materia trasparente) staccate l'una dall'altra, si può anche ammettere che, sino a quando lo spessore della materia trasparente non è eccessivo, essi, costretti a deviare in vario modo nel loro cammino, finiranno col superare tale spessore, percorrendo realmente un tratto di lunghezza superiore a questo, pur uscendo con la stessa direzione di prima. Si comprende come tale ipotesi debba enunciarsi con ogni riserva, chè infatti non è ammissibile pensare a continui urti veri e propri fra i projettili e le particelle; perchè in tal caso la direzione primitiva del raggio non potrebbe venire conservata. Ma peraltro, quest'ultimo è il caso che interviene per spessori notevoli di sostanza trasparente, in cui cioè la luce viene in gran parte assorbita e diffusa in tutte le direzioni.

In sostanza, riferendosi alla figura, il tratto AC rappresenta il cammino rettificato che il corpuscolo luminoso, partendo da A, percorre per arrivare in B, mediante una linea sinuosa che si svolgerebbe attorno ad AB. Se la lastra MN è in moto, il corpuscolo arriva da A in B', e questo cammino rettificato è rappresentato da AD. Per cui l'indice di rifrazione si abbassa se, come nel caso della figura, il moto della lastra concorda con quello della luce, divenendo il rapporto AD/AB', più prossimo all'unità. Il rovescio accadrebbe se la lastra fosse dotata di moto contrario.

Forse, uno studio teorico approfondito dell'argomento, potrebbe portare ad una comprensione più completa di questo modello, nella eventuale formulazione di una teoria balistica.

La rappresentazione geometrica del fenomeno del trascinamento della luce, indicata in questa Nota, se può dar luogo ad interpretazioni conformi ad un ipotetico concetto balistico, è anche d'accordo con la teoria della relatività. La cosa, come mi ha fatto osservare il prof. Fermi, è del tutto intuitiva. Infatti, secondo detta teoria, la velocità della luce nel mezzo in moto deve essere sempre la stessa per un osservatore ad esso legato. Ora se la NB si è portata in $N'B'$, la faccia MA è andata in $M'A'$. Un osservatore in A sarebbe così andato in A', inoltre l'azione luminosa da A si è portata in B'. Per A' il fenomeno luminoso è dunque nelle stesse condizioni che nel caso della lastra ferma; poichè l'osservatore in esso collocato riterrà che l'indice di rifrazione del mezzo sia dato da $A'D/A'B'$, cioè identico al valore che si ha per il mezzo in quiete. Sicchè, per la teoria della relatività, la costruzione sarebbe del tutto rigorosa. Ma, se ciò è esatto, occorrerebbe dimostrare perchè, secondo tale teoria, non ha alcuna influenza l'aver trascurato, nella valutazione quantitativa del valore di V_2 più sopra riportata, termini di ordine superiore.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

CLASSI UNITE

Adunanza del 16 Gennaio 1927

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci Guidi, Parona, Mattirolo, Somigliana, Panetti, Sacco Pochettino e Boggio;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci Stampini, Schiaparelli, Patetta, Prato, Cian, Faggi, Luzio, Jannaccone, Solari, Bertoni e Vidari che funge da Segretario.

Scusano l'assenza i Soci Einaudi, Brondi e Rondolino.

Letto e approvato il verbale dell'adunanza precedente, il Presidente dà la parola al Socio Luzio perchè legga la relazione da lui stesa a nome della Commissione giudicatrice del premio Gautieri per la Storia (triennio 1922-24).

Il Socio Luzio legge fra l'attenzione generale la relazione che conclude con la proposta di assegnare l'intero premio al dott. Pietro Torelli per le sue varie, dotte e importanti pubblicazioni, fra le quali emerge l'ampia memoria: *Capitanato del popolo e Vicariato imperiale come elementi costitutivi della signoria Bonacolsiana*, appartenente appunto al triennio indicato 1922-24.

Il Socio Cian plaude alla relazione e alla proposta di premiare il dott. Torelli, di cui il collega Luzio ha bene illustrata la forte operosità scientifica; e si compiace col Luzio medesimo che si può considerare come l'incitatore e il consigliere del Torelli negli studii riferentisi alla città di Mantova.

Il Presidente si associa, e ricorda ai presenti che per la domenica prossima è indetta la nuova adunanza delle Classi unite per l'aggiudicazione del premio.

Il Socio Panetti coglie l'occasione dell'adunanza delle due Classi per presentare all'Accademia alcune pubblicazioni di Filippo Burzio, che interessano i cultori dei due gruppi di discipline: *Ginevra - Vita nuova* (Milano, 1920), *Politica demiurgica* (Bari, 1923), *Il secondo problema balistico, Rotazione dei proietti* (Torino, 1927), e ne discorre brevemente.

Il Presidente, a nome dell'Accademia, ringrazia; e chiude l'adunanza annunciando che alla seduta solenne del 30 corr. si è degnato di promettere il suo intervento S. A. R. il Principe di Piemonte.

Gli Accademici Segretari:
Oreste Mattirolo
Giovanni Vidari

CLASSI UNITE

Adunanza del 23 Gennaio 1927

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci D'Ovidio, Peano, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Panetti, Sacco, Pochettino, Boggio e Garelli;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci Brondi, Patetta, Cian, Faggi, Luzio, Jannaccone, Solari, Bertoni e Vidari che funge da Segretario.

Aperta la seduta, si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente invita quindi i Soci a procedere alla votazione per l'assegnazione del premio Gautieri per la Storia in base alla relazione Luzio letta e approvata nella seduta precedente e ora distribuita ai colleghi.

Essendo uno solo dei concorrenti proposto per il premio, cioè il dott. Pietro Torelli, la votazione si fa per *sì* e per *no*.

Raccolte le schede in numero di ventuna, corrispondente al numero dei votanti, il Presidente procede allo scrutinio con l'assistenza del Vice-Presidente Parona e del Segretario Vidari.

Risultano ventuno *sì*. Il Presidente proclama vincitore del premio Gautieri per la Storia (triennio 1922-24) il dott. Pietro Torelli, e scioglie la seduta.

Gli Accademici Segretari;
Oreste Mattirolo
Giovanni Vidari

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 23 Gennaio 1927

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Parona, Grassi, Somigliana, Panetti, Sacco, Pochettino, Boggio, Garelli e il Segretario Mattirolo.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che risulta approvato.

Il Socio Somigliana presenta all'Accademia in dono il IV volume della Edizione Nazionale delle Opere di Alessandro Volta, e ne discorre brevemente facendo rilevare l'importanza del contenuto di questo nuovo volume dal quale traspare tutta l'attività intima del Volta. — Il Presidente ringrazia nel nome dell'Accademia.

Il Socio Somigliana, ricordando che l'anno 1927 glorifica il centenario della morte del Volta, comunica all'adunanza che il nostro Socio Patetta è possessore di un certo numero di lettere del Volta dirette al Marchese Antinori che fu insigne capo di quel movimento intellettuale che ha preceduto in Italia il movimento politico che ha portato all'indipendenza del paese.

Ricorda inoltre che egli stesso ebbe la ventura di trovare le lettere corrispondenti dell'Antinori al Volta, e che tali lettere

si potrebbero pubblicare negli *Atti* della nostra Accademia, avendo generosamente il Socio Patetta annuito a che tale pubblicazione potesse avvenire. — A questo punto entra casualmente nell'aula il Socio Patetta, il quale, udita la proposta Somigliana, dichiara di appoggiarla con il materiale da lui posseduto, al quale ha aggiunta recentemente una lettera del Volta al Beccaria particolarmente interessante.

Il Presidente ringrazia nel nome dell'Accademia i due Soci e li prega di mettersi in relazione onde la pubblicazione possa aver luogo nei nostri *Atti* e con sollecitudine, così da riuscire testimonianza della partecipazione dell'Accademia alle onoranze che tutta Italia tributa quest'anno alla memoria del grande fisico. L'Accademia plaude alle parole del Presidente.

Il Prof. Socio Grassi presenta la VII Edizione del suo *Corso di Elettrotecnica*, della quale è uscito ora questo primo volume, che non è solo una ristampa, ma al quale egli fece aggiunte e correzioni, per tenerlo in relazione coi continui progressi elettrotecnici.

Il Socio Garelli, nel nome del prof. Michele Giua, presenta per la inserzione negli *Atti* una Nota dal titolo: *Sulla tautomeria dell'etere etilico dell'acido* α-*etil*-β, β-*diacetilpropionico*, e ne discorre brevemente facendo rilevare l'importanza dei risultati ottenuti dall'Autore.

LETTURE

Sulla tautomeria dell'etere etilico dell'acido α-etil-β,β-diacetilpropionico.

Nota di MICHELE GIUA
presentata dal Socio naz. resid. Felice Garelli

Il tautomerismo cheto-enolico ha ricevuto in questi ultimi anni grande impulso dalle interessanti ricerche di K. H. Meyer (¹), il quale è pervenuto ad isolare la forma chetonica da quella enolica in sistemi cheto-enolici ritenuti per lungo tempo di difficile separazione. È noto infatti che l'isolare allo stato puro la forma chetonica da un sistema cheto-enolico è spesse volte impossibile a causa della sua trasformazione, anche alla temperatura ordinaria, nella forma enolica. Per quanto in alcuni casi la forma chetonica sia quella che si presenta stabile nelle condizioni normali (²), pure la sua separazione allo stato puro è sempre accompagnata da difficoltà pratiche.

In questa Nota riferisco sopra alcune ricerche da me fatte sulla separazione della forma chetonica dell'etere etilico dell'acido α-etil-β,β-diacetilpropionico. Questo composto si prepara con discreto rendimento condensando il sodioacetilacetone con l'α-bromobutirrato di etile, ad una temperatura di circa 150°. Esso fu ottenuto da Garner, Reddick e Fink (³), i quali lo descrivono come un liquido oleoso, che a 27 mm. di pressione bolle

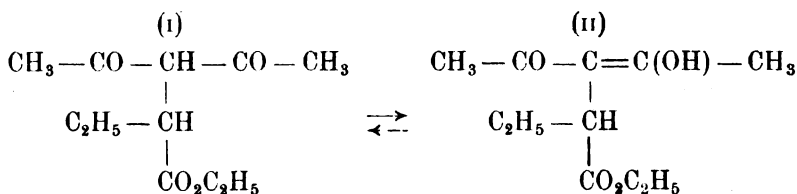
(¹) " Ber. chem. Gesell. ", *44*, 2726 (1911); *47*, 837 (1914); " Ann. Chem. ", *380*, 212 (1911).

(²) W. Wislicenus, " Ber. chem. Gesell. ", *20*, 2933 (1887); Claisen, " Ann. Chem. ", *321*, 37 (1896); R. Schiff, " Gazz. chim. ital. ", *30*, I, 218 (1900).

(³) " Journ. amer. chem. Soc. ", *31*, 667 (1909).

a 205°. Questi Autori non riportano nel loro studio nessun dato analitico sul composto indicato e descrivono solo alcuni prodotti di condensazione con diverse basi organiche; essi ottengono l'etere accennato condensando fra 175° e 185° una miscela di sodioacetilacetone e di etere etilico dell'acido α-bromobutirrico.

Dalle mie esperienze risulta che facendo avvenire detta condensazione a circa 150°, il prodotto principale della reazione è costituito da un liquido giallo-chiaro, che a 16-18 mm. di pressione bolle a 155-158°. Questa temperatura di ebollizione corrisponde a quella del miscuglio cheto-enolico dell'etere etilico dell'acido α-etil-β,β-diacetilpropionico. Da questo miscuglio, per prolungato raffreddamento a — 5°, si separa una sostanza cristallina, assai stabile alla temperatura ordinaria, che corrisponde alla forma chetonica del detto etere. Il composto descritto da Garner, Reddick e Fink corrisponde in realtà al miscuglio delle due forme seguenti:

$$\underset{\text{(I)}}{\begin{array}{c} CH_3-CO-\underset{\displaystyle \begin{array}{c}|\\ C_2H_5-CH\\ |\\ CO_2C_2H_5\end{array}}{CH}-CO-CH_3 \end{array}} \quad \rightleftarrows \quad \underset{\text{(II)}}{\begin{array}{c} CH_3-CO-\underset{\displaystyle \begin{array}{c}|\\ C_2H_5-CH\\ |\\ CO_2C_2H_5\end{array}}{C}=C(OH)-CH_3 \end{array}}$$

Parte sperimentale.

In un pallone munito di refrigerante a ricadere si trattano gr. 25 di acetilacetone, disciolti in 50 cc. di etere solforico anidro, con gr. 5,9 di sodio metallico in fili sottilissimi; terminata la reazione si distilla l'etere e al monosodioacetilacetone formatosi si aggiungono gr. 49 di α-bromobutirrato di etile, indi si riscalda in bagno d'olio a 150° circa per due ore. Dopo raffreddamento si aggiunge acqua e il liquido ottenuto, che contiene un olio giallo-rossastro, si estrae con etere. L'estratto etereo si tratta con solfato sodico anidro e dopo filtrazione si distilla; il residuo è costituito da un olio rossastro.

Seguendo questo procedimento furono fatte otto preparazioni e il prodotto di queste diverse reazioni, del peso di gr. 292, fu sottoposto alla distillazione frazionata nel vuoto; si ebbero così le seguenti frazioni:

I — Da 60° a 111° a 29 mm. di pressione: liquido incoloro del peso di gr. 28.

II — Da 111° a 135° a 20 mm. di pressione: liquido lievemente colorato in giallastro del peso di gr. 59.

III — Da 135° a 155° a 16-18 mm. di pressione: liquido giallo-chiaro del peso di gr. 100.

IV — Da 155° a 166° a 16-18 mm. di pressione: liquido giallo, vischioso, del peso di gr. 51.

V — Da 166° a 210° a 10 mm. di pressione: liquido bruniccio del peso di gr. 21.

VI — Il residuo della distillazione, del peso di circa gr. 30, ha, dopo raffreddamento, l'aspetto di una massa peciosa, nerastra.

La frazione I è costituita da acetilacetone e α-bromobutirrato di etile e nella frazione II trovasi alquanto etere etilico dell'acido α-etil-β,β-diacetilpropionico. Queste due frazioni furono distillate separatamente alla pressione ordinaria (758 mm.); dalla I si ottenne un liquido con punto di ebollizione compreso fra 150-182°, contenente alogeno e costituito per la massima parte da α-bromobutirrato di etile, mentre dalla II si raccolse un liquido con punto di ebollizione fra 250-260°, costituito dall'etere sopra indicato; ma a questa temperatura il prodotto comincia a decomporsi. La frazione III fu distillata nel vuoto (16-18 mm.), raccogliendo diverse frazioni: la maggior parte distillò fra 155-158°. Le frazioni IV e V non furono ulteriormente studiate, presentando scarso interesse per lo scopo delle mie ricerche.

Il liquido raccolto fra 155-158° fu di nuovo sottoposto ad una distillazione e per l'analisi si raccolsero diversi cc. di liquido con punto di ebollizione 156-157° a 18 mm. di pressione.

Gr. 0,1183 di sostanza dettero gr. 0,2687 di CO_2 e gr. 0,0857 di H_2O.

	Calcolato per $C_{11}H_{18}O_4$	*Trovato*
C %	61,64	61,94
H „	8,47	8,11.

Questo liquido si mescola facilmente a freddo con l'alcool, l'etere, l'acetone e il benzene, mentre si mescola con difficoltà

con l'etere di petrolio. La sua soluzione alcoolica dà col cloruro ferrico una intensa colorazione rosso-vinosa. Il suo peso specifico a 17°,5 è 1,0568.

Sottoponendo il liquido distillato fra 155-158° ad un prolungato raffreddamento a circa — 5° si riesce a separare una sostanza solida, che corrisponde alla forma chetonica (formola I) dell'etere dell'acido α-etil-β,β-diacetilpropionico. La sostanza solida si cristallizza dall'etere di petrolio e si ottiene in aghetti bianchi, splendenti, che fondono a 56-57°.

I - Gr. 0,2448 di sost. dettero gr. 0,5637 di CO_2 e gr. 0,1901 di H_2O.
II - Gr. 0,1732 " " " 1,3907 " " 0,1362 " .
III - Gr. 0,289 " disciolti in gr. 14,31 di benzene dettero un abbassamento di 0°,52.

Calcolato per $C_{11}H_{18}O_4$		*Trovato*	
C % : 61,64	I : 61,88	II : 61,52	III : —
H " : 8,47	8,50	8,80	—
Peso molec. : 214	—	—	194.

La sostanza si scioglie facilmente in alcool, etere, cloroformio, benzene e acido acetico; a caldo si scioglie pure in etere di petrolio. La sua soluzione alcoolica, trattata a freddo con cloruro ferrico, non dà all'inizio nessuna colorazione: dopo alcune ore incomincia però ad apparire la colorazione dell'enolo. A caldo questa colorazione si ottiene in breve tempo.

Le due forme tautomere dell'etere etilico dell'acido α-etil-β,β-diacetilpropionico reagiscono con l'idrossilamina, idrazina e fenilidrazina, formando prodotti di condensazione liquidi. Il prodotto di condensazione con la fenilidrazina fu descritto da Garner, Reddick e Fink come un derivato del pirazolo. Ho trovato che entrambe le forme dànno anche prodotti di condensazione solidi con la semicarbazide e la tiosemicarbazide, ma non presentando interesse per queste ricerche non furono ulteriormente studiati.

Torino - Laboratorio di Chimica organica
della R. Scuola d'Ingegneria.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 6 Febbraio 1927

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. C. F. PARONA
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Guidi, Grassi, Somigliana, Sacco, Pochettino, Boggio, Garelli, Repossi e il Segretario Mattirolo.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Vice Presidente scusa l'assenza del Presidente Senatore Ruffini trattenuto a Genova per la stipulazione definitiva del compromesso riguardante il lascito destinato alla fondazione del *Premio Ravani*.

Il Segretario Mattirolo, nel nome della Dottoressa Silvia Colla, presenta e fa omaggio di un suo lavoro *Sulle Laboulbeniali osservate nelle Collezioni del R. Museo Zoologico di Torino*.

Seguendo le traccie dei lavori magistrali di Thaxter e di Spegazzini la D.ssa Colla è giunta a individualizzare n° 96 specie, fra le quali 6 risultate nuove e n° 4 varietà non ancora descritte.

Dal punto di vista della distribuzione geografica delle specie, questo studio, condotto nel Laboratorio dell'Istituto botanico della Università nostra, assurge ad una importanza che merita speciale riguardo, avendo l'A. potuto investigare materiali provenienti, si può dire, da tutte le regioni del Globo.

Come conclusione di questo notevole contributo di ricerche in un campo micologico assai difficile per la estrema minutezza del materiale di studio ancora poco noto, l'A. propone una Classificazione generale, non completamente morfologica, perchè in essa è pur tenuto conto di importanti criteri biologici.

Del tema riferentesi alle variabilità delle specie di Laboulbenie l'A. si è interessata in modo particolare studiando attentamente le variazioni che talora presentano forme numerosissime nella stessa specie, crescenti in massa sopra un individuo solo e delle quali l'A. ebbe cura di presentare la loro colleganza con una quantità di figure tratte dal vero e attentamente riprodotte nelle Tavole che accompagnano il lavoro.

Il Socio Pochettino presenta per la inserzione negli *Atti* una Nota del sig. prof. Giorgio Valle dal titolo: *Onde stazionarie nei sistemi in moto ad effetto "Doppler"*, e ne discorre brevemente.

LETTURE

Onde stazionarie nei sistemi in moto ed effetto Doppler.

Nota del Prof. GIORGIO VALLE
presentata dal Socio nazionale residente A. Pochettino

§ **1.** — Ho mostrato in precedenti pubblicazioni come l'ipotesi dell'etere immobile (K) porti, fra altro, alle seguenti leggi relative alla propagazione della luce e in genere delle onde elettromagnetiche, nel vuoto, fra punti d'un sistema K', in moto con velocità costante V:

I. La velocità di propagazione nella direzione di un raggio, che arriva in un punto di K' formando con V l'angolo φ, è:

$$C' = C \{ \sqrt{1 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} + \beta \cos \varphi \} , \tag{1}$$

se C indica la velocità di propagazione costante in K e β il rapporto d'aberrazione $\frac{V}{C}$ (¹).

II. Finchè non intervengono riflessioni, il percorso dei raggi è indipendente dalla velocità V di K' (principio dell'identico percorso) (²).

III. Nella riflessione invece,

a) il piano di riflessione forma col piano d'incidenza l'angolo

$$\tau = \beta^2 \operatorname{sen} 2\psi \operatorname{sen} \theta \operatorname{ctg} i , \tag{2}$$

b) l'angolo di riflessione r è eguale all'angolo d'incidenza, aumentato dell'angolo

$$\epsilon = \beta^2 \operatorname{sen} 2\psi \cos \theta \cos^2 i , \tag{3}$$

(¹) G. VALLE, " Nuovo Cim. „ (N. S.), II, Parte I, § 1, p. 174 (1925).
(²) ID., loc. cit., Parte I, § 2, p. 180.

se ψ rappresenta l'angolo compreso tra V e la normale N della superfice riflettente e θ quello formato dal piano d'incidenza col piano $[NV]$ (1).

IV. La normale n, comune a tutte le superfici d'onda, che corrispondono a punti del medesimo raggio R, forma con quest'ultimo l'angolo

$$\alpha = \beta \operatorname{sen} \varphi \tag{4}$$

e giace nel piano $[RV]$ (2).

§ 2. — Tenendo presenti queste leggi, si può dimostrare dapprima che in K' si possono produrre onde stazionarie nel vuoto, come in K, ad onta del vento etereo, che, secondo l'ipotesi, deve sussistervi. Queste onde stazionarie hanno però caratteri diversi dall'ordinario.

Sia $Q_1\, Q\, Q_2$ (fig. 1) la traccia di una superficie piana di K', normale al piano del disegno $[xy]$. Nei punti di questa superfice sussistano, in concordanza di fase, oscillazioni elettromagnetiche

$$z = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\tau} t\,,$$

di periodo τ. Il piano $[xy]$ comprenda la velocità V di K' e il raggio QO formante con V l'angolo ϑ e, per la legge IV, l'angolo $\alpha = \beta \operatorname{sen} \vartheta$ con la normale n della superfice d'onda $Q_1\, Q\, Q_2$. Alla distanza l da Q sia infine disposta una superficie piana riflettente $O_1\, O\, O_2$ orientata in modo che il raggio riflesso OQ rifaccia il cammino del raggio incidente QO.

Affinchè ciò avvenga, la normale n' di $O_1\, O\, O_2$ deve formare, giacendo nel piano $[xy]$, un angolo

$$i = \frac{\beta^2}{2} \operatorname{sen} 2\vartheta$$

---

(1) G. Fiegna-G. Valle, "Nuovo Cim.", (N. S.), III, p. 41 (1926). Sono trascurate, come sempre, le potenze di β superiori alla seconda.

(2) G. Valle, "Nuovo Cim.", (N. S.), II, p. 43 e seg. (1926), e "Nuovo Cim.", (N. S.), II, p. 214, nota 1 (1926).

con la direzione del raggio QO (legge III) ([1]). Ciò sempre, non tenendo conto dei termini contenenti potenze di β superiori alla seconda. Del resto, per noi, gli angoli formati dalle normali n ed n' con la direzione del raggio QO non hanno importanza; dobbiamo considerare soltanto le condizioni d'interferenza lungo il raggio medesimo.

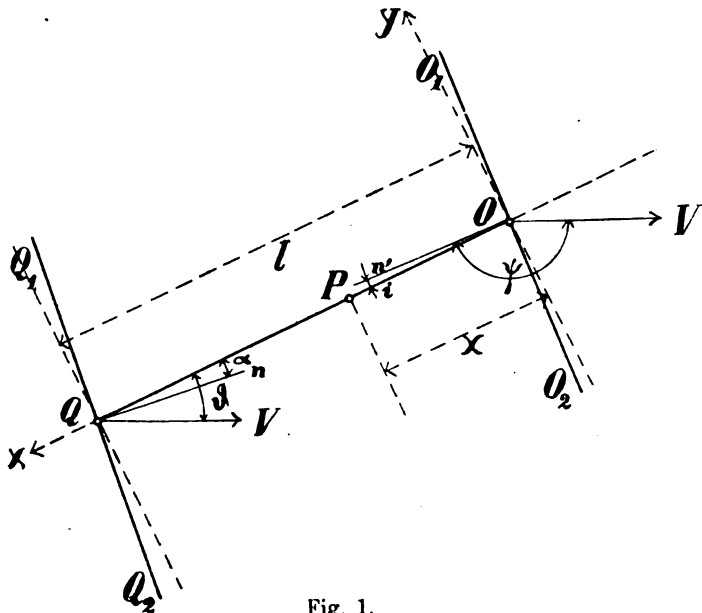



Fig. 1.

In un punto P, compreso fra Q ed O e posto alla distanza x da O, l'eccitazione elettromagnetica arriverà al tempo t per due vie diverse, l'una diretta: QP, l'altra indiretta: $QO + OP$, con un ritardo di fase sull'eccitazione, che al tempo t sussisterà in Q, di

$$t_1 = \frac{l - x}{C'_{QP}},$$

([1]) Nel caso trattato è $\psi = \pi - \vartheta$ e $\theta = 0$, e perciò (legge III) $\tau = 0$ ed $\epsilon = -\beta^2 \operatorname{sen} 2\vartheta \cos^2 i$; d'altronde i è tanto piccolo che si può considerare $\cos^2 i = 1$. Si ha così $r = i - \beta^2 \operatorname{sen} 2\vartheta$ e, ponendo la condizione di collimazione $r = -i$, risulta

$$i = \frac{\beta^2}{2} \operatorname{sen} 2\vartheta.$$

e rispettivamente (tenendo conto dello spostamento di fase dovuto alla riflessione) di

$$t_2 = \frac{l}{C'_{QO}} + \frac{x}{C'_{OP}} + \frac{\tau}{2} .$$

C'_{QP}, C'_{QO} e C'_{OP} rappresentano le velocità di propagazione sui percorsi QP e QO $(\varphi = \pi + \vartheta)$ e rispettivamente sul percorso OP $(\varphi = \vartheta)$, calcolate con la formula (1):

$$(5) \quad \begin{cases} C'_{QP} = C'_{QO} = C \left\{ \sqrt{1 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta} - \beta \cos \vartheta \right\}, \\ C'_{OP} = C \left\{ \sqrt{1 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta} + \beta \cos \vartheta \right\}. \end{cases}$$

Poichè $C'_{QP} = C'_{QO}$, il valore di l non ha influenza sullo spostamento di fase fra le due eccitazioni che provengono simultaneamente in P, e si può porre perciò $l = 0$. Si ha così:

$$t_1 = -\frac{x}{C'_{QP}}, \qquad t_2 = \frac{x}{C'_{OP}} + \frac{\tau}{2},$$

e per le due eccitazioni che al tempo t si sovrappongono in P si ottengono le relazioni:

$$z_1 = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\tau}\left(t + \frac{x}{C'_{QP}}\right), \qquad z_2 = -A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{C'_{OP}}\right),$$

per l'eccitazione risultante la relazione:

$$z = A \left\{ \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\tau}\left(t + \frac{x}{C'_{QP}}\right) - \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{x}{C'_{OP}}\right) \right\}.$$

Sostituendo i valori trovati per C'_{QP} e C'_{OP} (formule (5)), si ricava infine:

$$(6) \qquad z = 2A \operatorname{sen} 2\pi \frac{x}{\lambda'} \cos 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \frac{x}{\Lambda'}\right)$$

con

$$(7) \quad \begin{cases} \lambda' = \lambda \dfrac{1 - \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}}, \\ \Lambda' = \lambda \dfrac{1 - \beta^2}{\beta \cos \vartheta}, \end{cases}$$

posto $\lambda = C\tau$, lunghezza d'onda che, nel vuoto e nel sistema K, competerebbe al periodo τ.

§ **3.** — In un sistema in moto possono sussistere adunque onde stazionarie nel vuoto, anche sotto l'influenza d'un vento etereo. Si deduce infatti dalla formula (6) che, operando in K', come in K, per produrre delle onde stazionarie, si debbono ritrovare, a partire dalla superficie riflettente e lungo ogni raggio, dei punti $n\,n\,n$ equidistanti fra di loro di $\frac{\lambda'}{2}$, nei quali l'eccitazione rimane costantemente nulla, mentre nel mezzo di ogni intervallo $n\,n$ essa ha la massima ampiezza $2A$. Fra le onde stazionarie in K e quella in K' sussiste però questa sostanziale diversità: nelle prime l'eccitazione è ad ogni istante e in ogni punto fra due nodi consecutivi in concordanza di fase; nelle seconde la fase varia invece con continuità, a partire dalla superfice riflettente, ed è identica soltanto per i punti dello stesso raggio, che distano di Λ'. Il profilo di un'onda stazionaria in K' si modifica perciò, nell'intervallo d'un periodo, nel modo indicato dalla fig. 2; esso presenta ad ogni istante l'aspetto d'una curva di battimenti.

La distanza Λ' dipende, oltre che dal valore, anche dalla direzione della velocità V del sistema; per $\vartheta = 0$ essa è minima:

$$\Lambda' = \lambda \, \frac{1-\beta^2}{\beta},$$

sebbene, per piccoli valori di β, ancora notevolissima (per $\beta = 10^{-4}$, p. e., 10000 lunghezza d'onda); per $\vartheta = 90^\circ$ Λ' risulta invece infinitamente grande. Quando il sistema si muove perpendicolarmente al raggio, le onde stazionarie si manifestano, in quanto riguarda la concordanza di fase, come se il sistema fosse in quiete.

La lunghezza λ' delle onde stazionarie è diversa da quella λ, che corrisponderebbe al periodo τ nel sistema K. Essa non coincide nemmeno con quella delle onde incidenti:

$$\lambda_i = \lambda \left\{ \sqrt{1-\beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta} - \beta \cos \vartheta \right\},$$

nè con quella delle onde riflesse:

$$\lambda_r = \lambda \left\{ \sqrt{1-\beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta} + \beta \cos \vartheta \right\};$$

λ' è eguale alla media armonica di queste due ultime lunghezze d'onda:

$$\lambda' = \frac{2\lambda_i \lambda_r}{\lambda_i + \lambda_r} = \lambda \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}} \,.$$

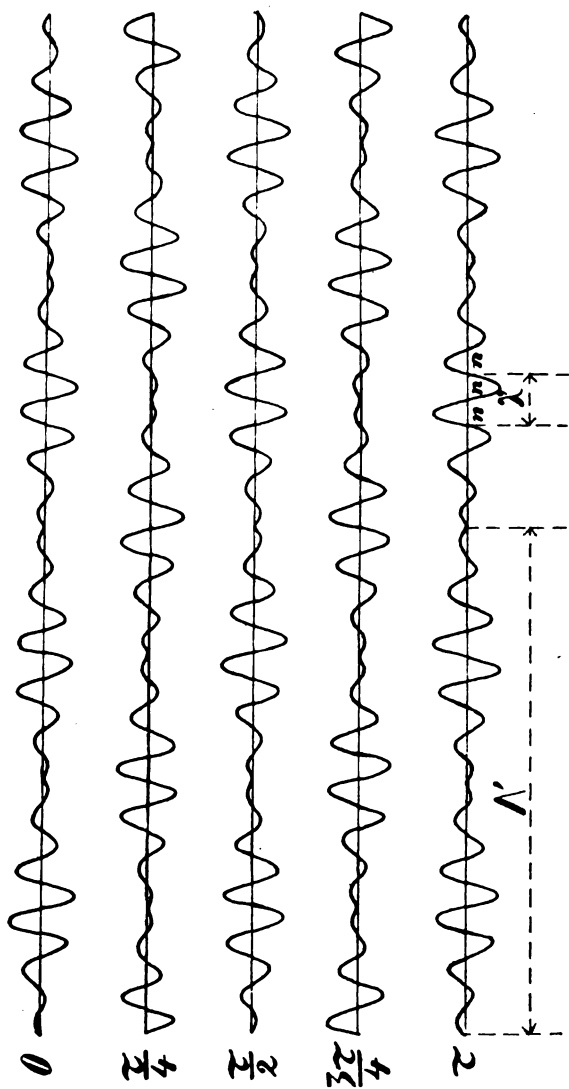



Fig. 2.

§ **4.** — Le leggi relative alla formazione delle onde stazionarie in un sistema K' in movimento, dedotte nel § 2, si

possono applicare senz'altro al caso di un conduttore filiforme rettilineo QO, di lunghezza l, isolato agli estremi ed eccitato periodicamente in modo conveniente in Q. Il filo compie allora, com'è noto, funzioni analoghe a quelle di una canna sonora e i caratteri delle oscillazioni elettriche, che in esso si manifestano, sono determinati dall'interferenza fra le perturbazioni elettromagnetiche, che, partendo da Q, si propagano nel vuoto o nel mezzo, che circonda il filo, fino ad O e quelle che, dopo avervi subìto una riflessione, ritornano verso Q. In particolare, il periodo fondamentale τ delle oscillazioni elettriche del filo è determinato dalla condizione che la lunghezza l sia eguale alla metà della lunghezza λ' delle corrispondenti onde stazionarie nel vuoto o nel mezzo, che circonda il filo.

Per il vuoto, si ha perciò dalla formula (7), tenendo conto che è $\lambda = C\tau$:

$$l = \frac{\lambda'}{2} = \frac{\lambda}{2} \frac{1-\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}} = \frac{C\tau}{2} \frac{1-\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}} \tag{8}$$

e cioè:

$$\tau = \frac{2l}{C} \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}}{1-\beta^2}.$$

Il fattore $\frac{2l}{C}$ rappresenta il periodo proprio τ_0 dell'oscillatore immobile nel sistema K. Questo periodo, al pari della lunghezza l o della lunghezza d'onda $\lambda_0 = C\tau_0$, costituisce una costante caratteristica dell'oscillatore considerato. Quando l'oscillatore si muove con una velocità costante V formando l'angolo ϑ con la direzione di quest'ultima, il suo periodo proprio fondamentale diventa invece:

$$\tau = \tau_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}}{1-\beta^2}. \tag{9}$$

Il periodo proprio d'un oscillatore elettromagnetico rettilineo dipende adunque dal valore e dalla direzione della sua velocità (effetto di II ordine in β).

Il periodo τ è sempre maggiore di τ_0. Il minimo allungagamento del periodo lo si ottiene per $\vartheta = 90^\circ$, cioè quando il

movimento dell'oscillatore avviene perpendicolarmente alla sua direzione. Si ha allora:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} . \tag{10}$$

Questo caso è particolarmente importante, perchè solo quando l'oscillatore è perpendicolare al movimento si possono applicare ai fenomeni le considerazioni più semplici, che si riferiscono ad una sorgente puntiforme di onde elettromagnetiche.

Sorgente di onde elettromagnetiche diventa infatti il nostro conduttore filiforme rettilineo, se è eccitato periodicamente in Q, p. e. con una scintilla oscillante. Raggiunto invece, durante il suo movimento, col periodo τ, da onde elettromagnetiche, esso deve all'incontro funzionare da risonatore. Dalla formula (8) risulta subito che, per avere il massimo di risonanza relativamente al periodo τ, un risonatore in moto ($\vartheta = 90°$) dovrà assumere la lunghezza:

$$l = \frac{C\tau}{2} \sqrt{1-\beta^2}.$$

Misurata con un risonatore in moto, la lunghezza d'onda corrispondente al periodo τ, col quale le onde elettromagnetiche raggiungono il risonatore, sarà perciò:

$$\lambda' = C\tau\sqrt{1-\beta^2}. \tag{11}$$

§ **5.** — Se tanto l'oscillatore, che emette le onde, quanto il risonatore, che le riceve, apparterranno al medesimo sistema K' in movimento, mancando, com'è noto, l'effetto Doppler, le variazioni considerate nel precedente paragrafo non potranno venire naturalmente neanch'esse constatate. L'accorciamento della lunghezza d'onda riscontrato dal ricevitore (formula (11)) neutralizza infatti senz'altro l'effetto dovuto all'accrescimento del periodo proprio dell'oscillatore mittente (formula (10)) e la lunghezza d'onda constatata è sempre $C\tau_0 = \lambda_0$, come se il sistema fosse in quiete.

Un aspetto diverso prende la questione nel caso di un moto relativo della sorgente e dell'osservatore; dell'oscillatore mittente M e del risonatore ricevente R (fig. 3). Il medesimo moto

relativo si può realizzare in infiniti modi e, in particolare, o assegnando ad R una certa velocità V e tenendo fermo M o assegnando a quest'ultimo la velocità $-V$ e tenendo fermo R. Per i due casi, essendo φ l'angolo, che la congiungente RM forma all'istante considerato con la velocità V, l'ordinaria teoria dell'effetto Doppler dà valori diversi della lunghezza d'onda λ' constatabile mediante il risonatore R, fermo restando il valore λ_0, che caratterizza l'oscillazione mittente. Pel primo caso (M immobile), la teoria dà:

$$\lambda' = \lambda_0 \frac{1}{1+\beta\cos\varphi}, \tag{12}$$

pel secondo (R immobile):

$$\lambda' = \lambda_0 (1 - \beta\cos\varphi). \tag{13}$$

I valori differiscono per un termine di secondo ordine in β:

$$\Delta\lambda' = \beta^2 \frac{\cos^2\varphi}{1+\beta\cos\varphi}, \tag{14}$$

e di questa differenza ci si rende ragione, osservando che l'ipotesi dell'esistenza d'un etere immobile toglie, di fatto, ogni validità alla supposizione che i due moti considerati sieno relativamente identici. L'ipotesi dell'etere immobile sembra anzi richiedere, come diretta conferma, l'esistenza dell'accennata asimmetria nell'effetto di Doppler. Ne fa fede l'analoga considerazione acustica.

La dipendenza del periodo proprio d'un oscillatore dalla velocità, dedotta nel § 4, partendo appunto dall'ipotesi dell'etere immobile, annulla invece tale asimmetria. Si ottiene cioè, pur accettando e seguendo anzi rigorosamente le ipotesi classiche, almeno per quanto riguarda l'elettrodinamica e in particolare l'effetto Doppler, un risultato, che concorda con quello della teoria della relatività. È quanto verrà dimostrato nel paragrafo seguente.

§ **6.** — Sia φ l'angolo, che, a giudizio di un osservatore solidale con R, forma la congiungente RM con la direzione del movimento relativo, al momento dell'osservazione, e ciò tanto

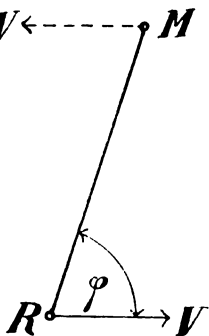
nel caso che R si supponga in movimento, quanto in quello che lo si supponga in quiete (fig. 3). Ambidue gli oscillatori sieno inoltre orientati perpendicolarmente al piano $[MRV]$.

Consideriamo il primo caso (M immobile). Al momento dell'osservazione (angolo $MRV = \varphi$), il treno d'onde emesso da M, di lunghezza d'onda λ_0, raggiunge R con la velocità:

Fig. 3.

$$C' = C \{ \sqrt{1 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} + \beta \cos \varphi \},$$

data dalla formula (1), e cioè (effetto Doppler) con il periodo:

$$\tau = \frac{\lambda_0}{C'} = \frac{\lambda_0}{C \{ \sqrt{1 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta} + \beta \cos \varphi \}} .$$

Per questo periodo, la lunghezza d'onda λ', misurata dal risonatore in moto, è però, secondo la formula (11):

$$\lambda' = \lambda_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 + \beta^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} + \beta \cos \varphi} . \tag{15}$$

Questo è quanto risulta pel primo caso di moto relativo.

Nel secondo caso (R immobile), l'oscillatore M emette onde col periodo τ, dato dalla formula (10), ma la lunghezza d'onda dipende, pel movimento di M, dalla direzione (effetto Doppler). Per calcolare la lunghezza d'onda λ' nella direzione φ, in cui la radiazione perviene ad R, ci possiamo riferire alla fig. 4. All'inizio d'un periodo, l'oscillatore si trovi in M'. L'onda emessa da M' avrà raggiunto, alla fine del periodo τ, la sfera $P_1 P P_2$, di raggio $M'P = C\tau$, mentre l'oscillatore sarà pervenuto in M, alla distanza $MM' = V\tau$ da M'. La lunghezza d'onda nella direzione φ sarà perciò:

$$\lambda' = MP = QP - QM,$$

ossia:

$$\lambda' = C\tau \cos \alpha - V\tau \cos \varphi = C\tau \{ \cos \alpha - \beta \cos \varphi \} .$$

D'altra parte varrà per l'angolo α (angolo d'aberrazione) la relazione:

$$\operatorname{sen} \alpha : \operatorname{sen} (\pi - \varphi) = V\tau : C\tau ,$$

cioè:

$$\operatorname{sen}\alpha = \beta \operatorname{sen}\varphi\,, \qquad \cos\alpha = \sqrt{1-\beta^2 \operatorname{sen}^2\varphi}\,;$$

sarà cioè:

$$\lambda' = C\tau \left\{ \sqrt{1-\beta^2 \operatorname{sen}^2\varphi} - \beta\cos\varphi \right\}.$$

Fig. 4.

Tenendo conto del valore di τ dato dalla (10) e mettendo, come sempre, $C\tau_0 = \lambda_0$, si ottiene infine:

$$\lambda' = \lambda_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2 \operatorname{sen}^2\varphi} - \beta\cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

e amplificando per $\left\{ \sqrt{1-\beta^2 \operatorname{sen}^2\varphi} + \beta\cos\varphi \right\}$:

$$\lambda' = \lambda_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2 \operatorname{sen}^2\varphi} + \beta\cos\varphi}\,, \tag{16}$$

cioè un valore identico a quello trovato per M immobile (formula (15)).

Si ha cioè:

$$\Delta\lambda' = 0\,, \tag{17}$$

come nella teoria della relatività.

§ 7. — La nostra teoria, per quanto basata ancora rigorosamente sui concetti classici prerelativisti, conduce adunque a una formula per l'effetto Doppler, che collima con quella relativista. Difatti la formula qui dedotta:

$$\lambda' = \lambda_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} + \beta \cos \varphi}, \tag{15-16}$$

che dà l'effetto di Doppler in funzione della *sola* velocità relativa V, contenuta in β, non differisce sostanzialmente da quella della teoria di Einstein, che è:

$$\lambda' = \lambda_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta \cos \theta}. \tag{18}$$

La diversità formale dipende unicamente dal diverso significato, che si assegna all'angolo nelle due teorie. Di ciò diremo prossimamente in altra Nota.

Del resto, per φ, risp. $\theta = 0$, anche questa diversità formale scompare e ambedue le teorie dànno:

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}. \tag{19}$$

Per $\varphi = 90°$ risulta invece dalla formula (15-16): $\lambda' = \lambda_0$, mentre la formula di Einstein (18) dà per $\theta = 0$:

$$\lambda' = \lambda_0 \sqrt{1-\beta^2}, \tag{20}$$

cioè quell'effetto Doppler *trasversale*, che avrebbe dovuto consentire, secondo alcuni, una verifica sperimentale della teoria della relatività. In realtà, anche la nostra formula (15-16) dà, per $\cos \varphi = \frac{\beta}{2}$, lo stesso effetto di secondo ordine, e l'effetto medesimo risulta anche, per questo valore di φ, dalle formule classiche (12) e (13). Dimostreremo nella prossima Nota che all'angolo $\theta = 0$ di Einstein corrisponde appunto, nella nostra teoria, l'angolo $\varphi = \text{arc} \cos \frac{\beta}{2}$. Sembra dunque, anche teoricamente, poco convincente il tentativo di ricavare una conforma

della teoria della relatività dall'esistenza di un effetto Doppler trasversale.

Comunque, è essenziale il fatto che, per le onde elettromagnetiche, anche secondo le teorie classiche, l'effetto Doppler non presenta l'asimetria, che finora si credeva dovesse necessariamente risultare dall'ipotesi che quelle onde si propagassero in un mezzo immobile. Per quanto l'etere stagnante renda apparentemente diversi fra di loro gli infiniti moti relativi, cinematicamente identici, realizzabili fra una sorgente e un ricevitore d'onde elettromagnetiche, l'effetto Doppler rimane sempre, per tutti, lo stesso.

Torino, Istituto di Fisica della R. Università.
Dicembre 1926.

L'Accademico Segretario
Oreste Mattirolo

CLASSI UNITE

13 Febbraio 1927

SEDUTA SOLENNE

alla presenza di S. A. R. il Principe di Piemonte

La seduta solenne, indetta per inaugurare l'anno accademico e celebrare il primo centenario della morte di Alessandro Volta, già Socio dell'Accademia, è onorata della presenza augusta di S. A. R. il Principe di Piemonte.

Siedono ai lati del Principe il Prefetto di Torino, generale Raffaele De Vita, e il Podestà di Torino, conte Luigi Balbo Bertone di Sambuy.

Sono inoltre presenti S. E. Casoli cav. Gran Croce Vincenzo, il generale Biancardi Gr. Uff. Pietro, i senatori Bertetti Gr. Uff. Michele, Ferrero di Cambiano marchese Cesare, Orsi nob. Delfino, l'on. deputato Domenico Bagnasco, il Gr. Uff. Anselmi avvocato Giorgio, R. Commissario per l'amministrazione provinciale, molte altre autorità, professori universitarii, signore.

Hanno scusato inoltre la loro assenza, ringraziando dell'invito, S. E. l'arcivescovo di Torino, cardinale Gamba, S. E. C. Petitti di Roreto, generale comandante la prima Armata, S. E. L. Tiscornia, generale comandante il Corpo d'armata di Torino, S. E. F. Sasso, generale di Brigata; l'on. Bruno Gemelli.

De' Soci della R. Accademia sono presenti, oltre il Presidente senatore Francesco Ruffini:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci: sen. D'Ovidio, Peano, Parona, Mattirolo, Grassi, Somi-

gliana, Panetti, Ponzio, Sacco, Herlitzka, Pochettino, Boggio, Garelli, Repossi;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci: De Sanctis, Stampini, sen. Brondi, sen. Einaudi, sen. Schiaparelli, Patetta, Prato, on. Cian, Faggi, Luzio, Jannaccone, Solari, Bertoni, Rondolino e il Segretario Vidari.

Hanno scusato l'assenza i Soci: S. E. il cav. Paolo Boselli e il prof. Camillo Guidi.

Il Presidente Ruffini, avuto da S. A. R. il permesso di dichiarare aperta l'adunanza, legge il seguente discorso:

" Altezza Reale, Eccellenze, Signori,

" La nostra Accademia, sorta nel 1757 come privata società di studiosi cittadini, ottenne tosto, per la stima in cui l'aveva il Principe ereditario di allora e grazie alla intercessione di lui presso il Re suo padre, l'ambitissima qualifica di *Società reale*; finchè lo stesso Principe, assunto al trono con il nome di Vittorio Amedeo III, si compiacque di prenderla, come precisamente Ei diceva nelle RR. Lettere-patenti del 25 luglio 1783, " sotto l'immediata e speciale *sua* protezione ", conferendole il titolo che essa tuttora reca di *Reale Accademia delle Scienze*. E la immagine di quel Sovrano a noi tanto benevolo sta da allora al posto di onore in questa aula, spirito presente e tutelare della nostra vita accademica.

" Chiaro, pertanto, che in nessuna occasione più bella e sotto nessun auspicio più augusto si poteva da noi rinnovare la tradizione antica di queste nostre adunanze solenni, se non mentre ha preso stabile dimora nella nostra città un altro Principe ereditario, che noi sappiamo parimente estimatore del sapere e, per di più, ricercatore e ravvivatore indefesso e appassionato di tutte le vestigia e di tutte le memorie della sua Casa gloriosa in questa nostra vecchia e fedele Regione piemontese.

" Anche ci parve che l'occasione e l'auspicio fossero parti-

colarmente propizî a stringere di bel nuovo i legami, onde eravamo un tempo uniti alle più alte rappresentanze dei poteri dello Stato, che amavano affidarci delicati uffici di pubblico servizio; ed a riprendere inoltre contatto con la pubblica opinione, dandole, come altre Accademie nostrane e straniere usano, regolare contezza dei risultati della nostra attività scientifica.

" E il nostro pensiero rimonta alla più memorabile forse di queste nostre sedute solenni, quella del 31 di ottobre 1833, intesa a celebrare il primo mezzo secolo del sovrano riconoscimento; quando su cotesto medesimo seggio, largitoci, come del resto tutto il meglio della nostra suppellettile, da un nuovo tratto della regale munificenza, sedette il magnanimo Re Carlo Alberto; e gli stavano ai fianchi il Duca di Aosta e il Duca di Genova, e gli erano intorno le più alte cariche della Corte e dello Stato. Tra il pubblico elettissimo si trovava quel giorno anche il Conte Camillo di Cavour, allora di soli ventitrè anni: i vostri begli anni, Altezza Reale.

" Di ogni particolare di quella cerimonia fu affidato naturalmente alle nostre *Memorie* un resoconto, intonato, come è agevole intendere, alla eccezionale solennità dell'evento. Ma un altro e non meno particolareggiato resoconto, quel giorno medesimo, il Conte di Cavour consegnò in certo suo Diario intimo, e naturalmente di intonazione assai diversa, come volevano l'intimità del documento, l'indole arguta e lo stato d'animo di quell'uomo, che attraversava allora una delle più gravi crisi della sua esistenza. Ma alcune delle punte della sua ironica insofferenza — ci è pur necessario di convenirne — colpivano nel segno; poichè il programma di quella seduta importava una serie di ben dodici discorsi, in italiano e anche in francese, in prosa e anche in versi, la quale dovette però essere troncata a mezzo dopo due ore giuste di deferente audizione.

" Vogliate, Altezza, rassicurarvi subito! Noi non possiamo certo essere comparati a quei nostri predecessori illustri, che

avevano a presiederli un Prospero Balbo, solo superstite della primitiva Accademia del 1783, e si chiamavano Avogadro e Plana, Peyron e Sclopis, e Diodata Saluzzo; ma, in compenso, noi ci siamo proposti di essere molto più discreti; poichè il nostro programma — oltre questo mio doverosissimo omaggio di gratitudine a Voi, Altezza Reale, che vi siete degnato concederci l'altissimo onore della vostra presenza; oltre due succinte relazioni dei lavori delle due nostre Classi durante lo scorso anno accademico, che vi saranno lette dai due rispettivi segretari, i professori MATTIROLO e VIDARI — non comporterà che un solo discorso, inteso a commemorare il primo centenario della morte di Alessandro VOLTA; la quale commemorazione, in questo recinto dedicato al culto della scienza, può ben dirsi costituisse per noi un dovere sacro. L'ufficio di commemorare Alessandro VOLTA fu affidato al nostro Socio, professore SOMIGLIANA, a ciò designato da un triplice titolo: dalla competenza scientifica, dall'aver dato omai più anni alla ricerca paziente e all'edizione diligente degli scritti di Lui, dal potersi egli, solo fra noi, vantare conterraneo, anzi, più assai, congiunto di quel Grande.

" ALTEZZA REALE, ECCELLENZE, SIGNORI,

" Anche dell'odierna cerimonia sarà nei nostri Annali segnato il ricordo. Questi nostri Annali formano omai una ininterrotta catena che ha superato il secolo, ed altri ancora ne supererà. Essi hanno saputo conquistarsi un loro diritto di onorata cittadinanza ovunque nel mondo è un focolare di serio lavoro scientifico. Essi recheranno, pertanto, oltre questa nostra breve età, oltre questa nostra circoscritta regione, la lieta novella di un giovine Principe della più antica Casa nei tempi nostri regnante, che vuole onorato il sapere. Nei nostri vecchi cuori questo ricordo sarà il premio più prezioso delle nostre fatiche; e vi porrà questa certezza consolatrice, che tutto si può attendere, anche nel campo della scienza, dalla gioventù di

un Paese, la quale ha in un tale Principe il suo rappresentante e simbolo supremo „ (*Applausi vivissimi*).

Il Presidente dà quindi la parola al Socio MATTIROLO, Segretario della Classe di Scienze fisiche, il quale così riferisce intorno ai lavori della propria Classe durante l'anno accademico decorso:

“ ALTEZZA REALE,

“ L'attività della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, quale è consegnata nei verbali delle adunanze, si svolse nell'anno testè decorso con ritmo normale e con risultati scientifici che possiamo ritenere soddisfacenti, qualora si considerino gli argomenti trattati e l'importanza delle conclusioni.

“ I lavori presentati e pubblicati negli *Atti* sommano a n° 28, dei quali 12 dei Soci e 16 di estranei all'Accademia.

“ La Matematica, la Fisica, la Meccanica e l'Astronomia, considerate nel largo campo delle loro applicazioni, furono oggetto di studi e di comunicazioni importanti da parte dei nostri Soci e di estranei all'Accademia.

“ Il Direttore della Classe Socio SOMIGLIANA trattò di questioni di *Elastostatica*, ricercando la interpretazione meccanica delle proprietà analitiche dell'espressione dell'energia elastica.

“ Il Socio Tesoriere PANETTI studiò le sollecitazioni dovute al forzamento nelle verifiche degli organi meccanici.

“ Il Prof. SILVA discusse le osservazioni di latitudine studiate col metodo di Horrebow-Talcott, applicato ad una sola Stella zenitale; e la precisione delle osservazioni di gravità relativa, compensate col metodo di Venturi.

“ Filippo BURZIO si occupò delle equazioni differenziali nella derivazione dei proietti, scrivendone le equazioni del moto, integrandole per approssimazione.

“ Beniamino SEGRE studiò i sistemi semplicemente infiniti di superficie e le loro trajettorie ortogonali.

" Enrico PISTOLESI trattò dello slittamento elastico nelle trasmissioni con cingoli, illustrando il comportamento di un cerchione elastico deformabile in contatto con un terreno rigido.

" Vincenzo ODONE uno studio sulle oscillazioni trasversali di una sbarra, provocate da moto traslatorio periodico di una estremità, scrivendo le equazioni del moto, integrandole e verificando i risultati coll'esperienza.

" Luisa PELOSI presentò una nuova formola integrale relativa alla funzione di Green, applicandola ad alcuni moti di fluidi.

" Paolo VOCCA espose idee nuove sulla registrazione automatica dei segnali radiotelegrafici, e un metodo nuovo per la eliminazione degli errori di registrazione nella determinazione di longitudine.

" Eligio PERUCCA trattò ampiamente la questione relativa alla tensione superficiale delle superficie dei solidi e delle faccie cristalline.

" Infine il Socio GUIDI si occupò di una questione di priorità, relativa ad un metodo geometrico da lui proposto per calcolare il regime statico dei complessi elastici in cemento armato.

" La Chimica, considerata nelle varie sue manifestazioni, ebbe contributi notevoli, quali quelli del Socio GARELLI e di Ernesto MONATH che si occuparono di determinazioni crioscopiche sopra soluzioni di Gaz; di Michele GIUA e di Lino THUMIGER sulla disidratazione pirogenica dei fuseloli; di Giovanni Battista SEMERIA e di BOCCA che riferirono alcune loro ricerche sulle Diossime.

" Nel campo della Geologia e della Mineralogia notevolissimi contributi hanno portato le note competenze di due dei nostri Soci.

" Il Vice Presidente PARONA illustrò la Fauna a Rudiste di Villa Vallelonga in Abruzzo.

" Il Socio SACCO si occupò dello studio dell'età degli Argilloscisti ofitiferi dell'Apennino, che egli assegna al periodo cre-

taceo non eocenico, investigando la loro importanza come terreni petroliferi e traendo conclusioni sulle probabilità del loro sfruttamento.

" I glacionevati dei Colli torinesi e le osservazioni geo-speleologiche in Val di Pesio, nonchè alcune note sulle Domos de Gianas in Sardegna, interessano altri lavori del Socio Sacco.

" Della Pirargirite e della Proustite del Sarrabus in Sardegna e dell'importantissima zona mineralizzata di Val di Cogne, si occupò Massimo Fenoglio; mentre un interessante lembo pliocenico marino di Casanova-Lanza in Provincia di Como, fu studiato da Umberto Monterin.

" La Botanica fu oggetto di parecchie contribuzioni scientifiche.

" Il Socio Segretario Mattirolo riferì sui vegetali rinvenuti nel celebre deposito funerario dell'Architetto Khà e di sua moglie Mirit (vissuti durante la XVI Dinastia faraonica, 3500 anni circa av. e. v.), scoperto dalla Missione Archeologica italiana inviata in Egitto da S. M. il Re Vittorio Emanuele III, sotto la direzione dell'insigne nostro Socio Senatore Ernesto Schiaparelli.

" La D.ssa Silvia Colla espose le sue ricerche sull'organo di assorbimento delle specie fungine del genere Laboulbenia, parassite degli insetti e particolarmente dei Ditteri.

" Il Dr Piero Giai-Levra interessò l'Accademia sulle Diatomee postglaciali delle Torbiere di Trana presso Avigliana.

" La Reale Accademia, memore e riconoscente verso la memoria dei Soci defunti, volle fossero degnamente ricordati nelle loro benemerenze scientifiche.

" Al Socio Pierantoni venne affidata la commemorazione del Socio nazionale non residente, Senatore Giovanni Battista Grassi, che per le sue ricerche nei campi della Zoologia, dell'Anatomia comparata e della Parassitologia, ebbe fama mondiale.

" Il Socio Rosa rievocò la nobile figura del Conte Tommaso

Salvadori, per 53 anni attivissimo Socio del nostro Sodalizio. La parte che egli ebbe nella redazione del classico Catalogo delle Collezioni del *British Museum*, e nella illustrazione degli ingenti materiali raccolti, specialmente in Australia, da viaggiatori italiani ed esteri, hanno posto il Salvadori fra i sommi ornitologi dell'epoca presente.

" In conclusione, l'esame sintetico or ora esposto dell'attività della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali durante il decorso anno 1926, prova che la nostra Accademia, abbandonata oramai la considerazione puramente statica delle questioni scientifiche, è animata oggi da quei concetti di praticità della scienza che interessano gli ideali della Società moderna.

" Conscia e fiera dell'altissimo còmpito assegnatole da una tradizione secolare, di guidare cioè il movimento scientifico del Piemonte, continua con novello vigore e con fervido sentimento di italianità a fecondare il campo che le fu affidato nell'interesse dell'incessante fiorire del progresso scientifico " (*Applausi*).

Il Presidente dà la parola al Socio Vidari, Segretario della Classe di Scienze morali, il quale così riferisce intorno ai lavori della Classe stessa:

Altezza Reale!

" Nell'anno accademico 1925-1926 la Classe di Scienze morali, storiche e filologiche svolse, come di consueto, la sua varia attività con studî diversi e con relazioni su concorsi a premî, su recenti pubblicazioni scientifiche, e su lavori presentati da estranei per inserzione negli *Atti* e nelle *Memorie*.

" Il Socio e Presidente dell'Accademia Senatore Ruffini in ampio studio su *Natura e grazia, libero arbitrio e predestinazione secondo la dottrina giansenistica* esaminò criticamente ed espose i precedenti storici di quella dottrina da Pelagio ed Agostino fino ai Molinisti e Tomisti, proseguendo poi nell'analisi della

dottrina stessa circa la grazia considerata nei suoi varî momenti.

" Il Socio PATETTA in una Nota su *Le prime edizioni del " Contrat social " e dell' " Emile "* segnalò un rarissimo esemplare del " Contratto sociale " posseduto dalla Biblioteca civica di Torino, e importante perchè contiene la famosa Nota sul matrimonio, soppressa poi per ordine dello stesso Rousseau. In una Nota successiva lo stesso Socio illustrò il *Sigillum ospicii illorum de Braida* della seconda metà del secolo XIII, degno d'essere segnalato perchè appartenente alla categoria, assai rara, dei sigilli di consorterie nobiliari.

" Il Socio Segretario VIDARI esaminò in una Nota, *L'educazione cartesiana in Italia e le idee pedagogiche di G. B. Vico*, i caratteri della educazione cartesiana, quale fu praticata principalmente nel Napoletano e in Sicilia nella seconda metà del Seicento, e quale risulta da attestazioni dell'epoca; e passò quindi ad una analisi illustrativa delle idee pedagogiche in qualche parte originali e profonde del più grande anticartesiano d'Italia, G. B. Vico.

" Il Socio LUZIO in una Nota, *Il Principe di Metternich e gli ambasciatori sardi Conte Pralormo e Conte Sambuy*, prese occasione da una recente opera sul Metternich di Enrico von Srbk per illustrare la figura del famoso Cancelliere, sulla base di dispacci molto interessanti e pieni di acute osservazioni dei due ambasciatori sardi, che seguivano con occhio vigile l'allargarsi delle crepe mal intonacate del governo austriaco, e ne traevano pronostici sulla politica della monarchia absburghese.

" Il Socio FAGGI in una prima Nota su *L'essere e il non essere nella sofistica greca* esaminò la interpretazione individualistica e scettica delle famose preposizioni attribuite ai sofisti greci. In una Nota successiva sulla *Genesi psicologica dei sistemi filosofici* illustrò, con gli esempi insigni del Cartesio, del Rosmini e dello Schopenhauer, la parte importante che hanno i processi incoscienti dello spirito nella formazione dei sistemi filosofici.

In una terza Nota su *L'idea dell'essere e le critiche del Manzoni al Rosmini* esaminò, sulla base del carteggio fra quei due grandi spiriti, le acute obiezioni Manzoniane, alle quali pare al Faggi che non molto felice sia stata la risposta del Roveretano.

" Il Socio Solari in una Nota su *Scienza e metafisica del diritto in Kant* diede un'esposizione critica della dottrina di Kant in rapporto alle correnti di pensiero anteriori e al complesso della filosofia di lui, rilevando com'egli sia stato intimamente avverso a tutte le dottrine tendenti a dar forma giuridica ad una fede politica morale religiosa, ma non liberale nel senso di credere alla spontanea armonia degl'interessi e degli egoismi sul fondamento di una naturale solidarietà umana e del libero giuoco della concorrenza economica.

" Il Socio Bertoni in una Nota *Intorno alla cronologia del cantare del Cid* discusse e confutò la tesi dello Zingarelli che vorrebbe dimostrare fallaci gli argomenti, con i quali il celebre " cantare „ viene comunemente ascritto a una età anteriore al mille trecentosette. In una successiva Nota su *La Biblioteca di Borso d'Este* presentò una redazione esatta del celebre inventario della Biblioteca di Borso d'Este, aggiungendo alcuni chiarimenti necessari a ben intendere il valore del prezioso documento, e un indice di libri francesi che dovettero far parte di quella ricca biblioteca quasi del tutto dispersa.

" Altre Note furono accolte dall'Accademia dei signori: Santorre De Benedetti sull'*Antichissima carta consolare pisana*; Camilla Schiavo sulla *Dottrina etico-pedagogica di E. Durkeim*; Filippo Burzio sul *Concetto di residuo in Pareto*; Arturo Solari sulle *Origini di Faenza*, e sul *Territorio dei Sapinati e Sarsina*; Annibale Pastore sul *Rapporto tra filosofia dell'intuizione e la filosofia del potenziamento*; Alessandro Passerin d'Entrèves sul *Concetto del diritto naturale cristiano e la sua storia secondo E. Troelsch*; Giuseppe Furlani sulla *Psicologia dello scrittore siriaco Aḥûdhemmêh*.

" Vanno ancora ricordate tre relazioni di Soci: quella del Socio Senatore EINAUDI intorno allo studio del dottore Mario FABIANI sulla *Teoria dell'esenzione del risparmio dalla imposta*, il quale studio fu poi accolto nel vol. 66 delle *Memorie*; la relazione del Socio SOLARI a nome della Commissione giudicatrice del premio Gautieri per la Filosofia per il triennio 1921-1923; infine la relazione del Socio nazionale non residente Remigio SABBADINI sul premio Vallauri per la Letteratura latina nel quadriennio 1919-1922.

" Questi due premi Gautieri e Vallauri furono aggiudicati, conforme alle proposte delle Commissioni, il primo in parti uguali ai professori Giorgio Del Vecchio e Michele Losacco; il secondo in parti uguali ai professori Wallace M. Lindsay e Eduard Norden.

" Un ultimo aspetto dell'attività della Classe va qui menzionato, ed è la sua partecipazione, ad opera del proprio rappresentante, e Direttore, il Socio DE SANCTIS, agli importanti lavori scientifici della Unione Accademica Internazionale costituitasi dopo la guerra.

" Così la Classe è andata e va compiendo con ininterrotta lena il suo triplice ufficio di promuovere con proprie ricerche il sapere nei varî rami delle scienze morali, di segnalare alla Accademia i lavori più degni per severità d'indagini e importanza di risultati, e di contribuire, conservando e custodendo con gelosa cura l'impronta del genio nazionale, alla vita scientifica dei paesi civili „ (*Applausi*).

Il Presidente dà infine la parola al Socio SOMIGLIANA, il quale legge il discorso commemorativo di Alessandro VOLTA. La lettura è seguìta con viva attenzione da S. A. R. e da tutto il pubblico; accompagnata qua e là da approvazioni, è salutata infine da unanimi calorosi applausi.

S. A. R. il Principe e le Autorità presenti si congratulano vivamente con l'oratore.

S. A. R. si degna esprimere al Presidente il proprio compiacimento per la solenne cerimonia; e viene quindi, fra le ovazioni del pubblico, accompagnato all'uscita dal Presidente, dal Vice Presidente PARONA, dal Tesoriere PANETTI e dai due Segretari di Classe.

Terminata la seduta solenne, i Soci delle due Classi si radunano in seduta privata per procedere alla nomina di un delegato dell'Accademia nel Consiglio d'amministrazione del Politecnico, e riesce confermato all'unanimità il Socio SOMIGLIANA.

Gli Accademici Segretari:
ORESTE MATTIROLO
GIOVANNI VIDARI

La vita scientifica di Alessandro Volta.

Discorso del Socio nazionale residente Prof. CARLO SOMIGLIANA

Il giorno 5 marzo 1827, alle ore 3 del mattino, si spegneva in Como, sua patria, Alessandro VOLTA. Era nato il 18 febbraio 1745. Aveva quindi oltrepassati gli ottantadue anni.

Coincidenza singolare, nello stesso giorno moriva a Parigi Pietro Simone Laplace e scomparivano così insieme due fra i più fulgidi astri che avevano brillato nel grande movimento intellettuale che aveva accompagnato la rivoluzione ed il primo impero.

Questi cento anni che sono trascorsi dalla morte di Alessandro Volta possono dirsi una conferma continuamente rinnovata della sua grandezza. Poichè la sua massima scoperta, che corona il pensiero scientifico di un secolo e sulla quale si fonda in gran parte la potenza operante del secolo successivo, è stata senza interruzione feconda di nuovi contributi alle scienze ed alla civiltà. E la sua nativa città e l'Italia ed il mondo scientifico tutto si apprestano, con giustificata unanimità, a celebrare degnamente questa data centenaria.

Ma la gloria lo aveva raggiunto assai prima della fine della sua lunga carriera, che fu tra le più fortunate e felici. Quanto travagliata e combattuta era stata la vita dell'altro grande che tiene col Volta il primo posto nella fisica italiana, il Galilei, altrettanto fulgida di continuati successi fu la sua. E, come scrisse un suo contemporaneo, nello stile del tempo, " neppur vivente offuscata venne la luce del suo sapere, nè obbrobriosa calunnia, nè vile invidia ardì molestarlo " (1).

(1) P. CONFIGLIACCHI, *Elogio scientifico di A. V.*, pag. 169 (in MONTANARI, *Lettere inedite di A. V.*).

Ciò senza dubbio si deve in parte all'epoca nella quale egli visse, epoca d'oro per le scienze fisiche e naturali, che giunte allora alla piena maturità si apprestavano alla conquista di ogni umana attività.

Ma sopratutto questo successo si deve alle qualità intrinseche dell'uomo, che fu grande e completo ed armonico in tutte le sue facoltà. La sua figura si attacca alle grandi figure del rinascimento italiano, nelle quali genialità ed umanità si bilanciavano nella creazione del tipo completo dell'uomo moderno.

Se alcuno sostenne che la genialità è qualcosa di anormale nella natura umana, e che non si produce che a spese di qualche altra facoltà essenziale, il Volta è una smentita assoluta di tale teoria.

Alto nella robusta persona, spirante calma e profondità di pensiero dai grandi e fermi occhi azzurri, di animo sereno, dignitoso e insieme modesto, di sensibilità squisita, a tutti i suoi contemporanei egli si impose.

Vissuto in un'epoca di passioni politiche violenti, nella quale si succedettero governi fondati sui principî politici più disparati ed opposti, egli non parteggiò per nessuno, non si prostrò a nessuno; tutti lo rispettarono e lo ammirarono. L'Austria di Maria Teresa gli aperse la via dell'insegnamento, quantunque fosse sfornito di qualsiasi titolo accademico; Bonaparte primo Console ed Imperatore lo predilesse e gli preparò il grande trionfo di Parigi. Il governo austriaco dopo il 1815 lo conservò decano della Facoltà filosofica della Università di Pavia, quantunque egli nel Senato di Milano si fosse manifestato decisamente contrario al ritorno degli austriaci in Lombardia.

Fu anche sinceramente credente e religioso, in conformità all'ambiente familiare e alla educazione ricevuta. Così un principe della Chiesa, studioso coltissimo ed entusiasta delle sue opere, il Card. Maffi, potè celebrarlo come l'uomo in cui le onde della fede e quelle della scienza non fanno fra loro morbose interferenze (1).

---

(1) A. Maffi, *Commemorazione di A. V.*, pag. 503 (*Scritti rari.* " Biblioteca del Clero ", vol. XLV, Siena, 1904).

Ed è cosa singolarmente notevole che la sua grandezza basata essenzialmente sopra ricerche scientifiche quasi inaccessibili alla maggior parte dei suoi contemporanei, quando le loro applicazioni pratiche, che ora appaiono gigantesche agli occhi di tutti, non erano affatto manifeste, la sua grandezza, sia stata immediatamente sentita da tutti, dai grandi del suo tempo fino alle più modeste figure. Prova sicura che fu grandezza vera, non momentaneo sfolgorìo di superficiali apparenze.

Vedere, per sommi capi almeno, come una tale magnifica attività si sia svolta, come tali straordinarie facoltà, sostenute da un lavoro lunghissimo e disciplinate dall'applicazione di un rigoroso metodo sperimentale, abbiano alfine portato ad una scoperta che è da ritenersi una delle maggiori che l'umanità abbia raggiunto, è opera ben degna di questo solenne momento per la nostra Accademia.

Essa porta così il suo contributo anche alla celebrazione centenaria che si svolgerà quest'anno, alla quale non poteva rimanere estranea, sia come Accademia italiana, sia perchè Volta ad essa appartenne come Socio, ed ebbe speciali rapporti cogli scienziati torinesi del suo tempo.

Con qualche trepidazione ho accettato l'ufficio onorifico che l'illustre Presidente e gli eminenti Colleghi hanno voluto affidarmi, ma anche con compiacimento d'italiano e di studioso nel richiamare una pagina di storia così gloriosa per il nostro paese.

I.

È un fatto singolarmente interessante che nè l'ambiente familiare nè l'educazione abbiano potuto avere alcuna influenza nella formazione della personalità scientifica di Alessandro Volta.

Nato da famiglia patrizia, in cui nessuno mai si era occupato di scienza, in cui erano vive le tendenze religiose, tanto che tre suoi fratelli maggiori percorsero carriera ecclesiastica e due sorelle furono monache, educato lui stesso nelle scuole di filosofia dei padri gesuiti, non si può pensare che abbia avuto preparazione scientifica di qualche momento nella sua adolescenza.

La sua istruzione fu di carattere letterario ed umanistico; non andò oltre alle scuole di rettorica e di filosofia. All'Università non arrivò che molto più tardi, come insegnante.

Si sa invece che un suo collega di studî, che fu poi il canonico Giulio Cesare Gattoni, aveva impiantato un piccolo gabinetto privato di fisica, nel quale il giovinetto Volta cominciò a sperimentare ed a meditare.

Il Gattoni, che gli fu poi amico per tutta la vita, era uomo di mente acuta, scrittore forbito e pungente. Fu nemicissimo delle nuove idee di libertà importate dalla Francia, e più ancora del governo che le rappresentava in Italia, contro il quale lasciò un voluminoso manoscritto che doveva servire ad infamare per sempre quei dominatori della *sventurata sua patria.*

Se egli non fu benevolo pei suoi contemporanei, merita tuttavia la gratitudine dei posteri per l'aiuto, forse anche l'inspirazione, data ai primi passi nella scienza di Alessandro Volta, che era di lui di poco più giovane.

Così a 18 anni troviamo il Volta già in corrispondenza scientifica con un illustre fisico francese, l'abate Nollet, e subito dopo con un celebrato professore di Fisica dell'Università di Torino, il Padre Giambattista Beccaria.

Ma la sua attività e il suo ingegno si erano già manifestati in varie composizioni poetiche, di cui restano numerosi frammenti in italiano, in latino e in francese. Ed aveva trascorso anche un periodo critico della sua vita, quando un suo maestro gesuita, buon giudice del suo ingegno, aveva usato ogni arte di persuasione ed anche di suggestione, per attirarlo nella Compagnia di Gesù, e l'aveva infine abbandonato alla sua sorte, predicendolo destinato al *vizio ed alla iniquità* (1).

Disgraziatamente quelle prime corrispondenze scientifiche del Volta andarono smarrite. Forse esistono ancora dimenticate in qualche biblioteca di questa città, ove il P. Beccaria le ricevette. La prima che possediamo fu rinvenuta, appena qualche anno fa, qui in Torino nella biblioteca di S. M. il Re.

Porta la data del 2 aprile 1765; il Volta aveva allora appena compiuti i venti anni. È una lettera lunghissima, scritta in italiano elegante, nella quale rende conto ampiamente di esperienze da lui eseguite con gran cura e precisione, elettrizzando per strofinio vari corpi e specialmente la seta. Egli è

(1) ZANINO VOLTA, *A. V. Biografia - Della giovinezza* (Milano, Civelli, 1875).

specialmente colpito dal fatto, che ritiene essere una sua scoperta, che la seta può essere elettrizzata positivamente e negativamente a seconda del corpo stropicciante; e pensa alla possibilità di una scala nella quale possano essere distribuiti i corpi in modo che ciascuno risulti elettrizzabile in più od in meno rispettivamente dai due fra i quali si trova. È sommamente interessante che in questo scritto giovanile si trovi così già in qualche modo adombrato il concetto della legge fondamentale che lo porterà alla sua più grande scoperta, sia pure in forma diversa ed ora non accettabile.

Ci appare così in questo documento un Volta che, sebbene ventenne. è già maturo, sia per la tecnica sperimentale che per la precisione ed il rigore del ragionamento. Ed anche per lo stile caratteristico che rimarrà inalterato in tutta la sua immensa produzione scientifica successiva. Letterariamente corretto ed elegante, egli non è mai conciso, e lo confessa schiettamente al suo maestro: “ Condoni questo ad una infelicità che io ho di non potermi spiegare con precisione e nettezza, d'esser molto confuso nell'enunciare i miei pensieri tal quali stanno in mia testa. insomma di non avere il dono della brevità „ (1).

Volta dunque fu precocissimo e si è formato da sè stesso. Non ha avuto maestri, forse pochi libri e qualche strumento dell'amico Gattoni o costruito da sè. Egli è stato, possiamo dire, un prodotto spontaneo della forza creatrice del genio.

Possiamo anche meravigliarci che una preparazione puramente classica, letteraria abbia potuto servire di base ad una attività così schiettamente scientifica e sperimentale. Ma conviene pensare che la dirittura mentale e la chiarezza d'idee dei classici antichi è forse meno lontana di quanto comunemente si crede, dal rigore di metodo, e dal senso della realtà, su cui le scienze fisiche e naturali si fondano e si sviluppano.

II.

La prima pubblicazione del Volta è del 1769; aveva allora 24 anni; ed è una lunga Memoria latina, di carattere in molta parte puramente teoretico, ed è forse l'unica di lui che abbia un

(1) Edizione Nazionale delle Opere di A. V., vol. III, pag. 15.

tale indirizzo, Ha per titolo: *De vi attractiva ignis electrici ac phaenomenis inde pendentibus*, ed è diretta al Padre Beccaria (1).

Cum primum incidi in egregium opus, quod de Electricitate artificiali atque Naturali inscripsisti.... existimare coepi tum motus electricos, tum etiam plura alia praecipua electricitatis phaenomena, vi alicui attractivae referri posse.

Così incomincia la Memoria e ne appare il concetto fondamentale. Poichè, egli pensa, la teoria del movimento dei pianeti si può esclusivamente fondare sulla teorica delle forze che agiscono nel sistema solare, analogamente i fenomeni elettrici debbono potersi spiegare in base alle forze che agiscono fra i corpi elettrizzati.

Concetto esattissimo, e che è sostanzialmente quello su cui fu eretta in seguito la teoria matematica dell'equilibrio elettrico, una delle più perfette fra quelle che noi ora possediamo.

Egli aveva anche avuto l'idea che si trattasse effettivamente di forze newtoniane, come risulta da un passo di una lettera dell'abate Nollet; ma nella Memoria *De vi attractiva* considera le cose da un punto di vista più generale. Oltre alle forze meccaniche newtoniane, cioè alla gravitazione, esistono in natura molte altre forze che hanno leggi diverse, come le forze capillari, le forze attive nelle reazioni chimiche, le forze di adesione, e così via, forze che egli chiama *immeccaniche*. Fra queste, non ancora definite nelle loro leggi d'azione, pone anche le elettriche e dal concetto della loro esistenza e da qualche carattere del loro modo di agire cerca di costruire una teoria di tutti i fenomeni elettrici conosciuti.

Ammette la teoria del fluido elettrico unico, secondo Franklin, quella che in qualche punto delle sue lezioni chiama *la nostra cara teoria frankliniana*, dell'elettricità per eccesso e per difetto, pur avendo chiara l'idea che per quanto riguarda l'elettricità positiva o negativa, si tratta di una mera convenzione.

Egli è così perfettamente orientato verso la reale spiegazione dei fatti, ma non la raggiunge intera, poichè gli manca il concetto dell'azione elementare newtoniana, che pur aveva da principio adombrato.

(1) Ediz. Naz., vol. III, pag. 22.

Ma un secondo concetto informa la Memoria. Il Beccaria aveva svolto una teoria così detta della elettricità vindice, secondo la quale le armature metalliche di un condensatore, quando venivano separate dal dielettrico interposto, asportavano o *rivendicavano* tutta la carica. Il Volta opina al contrario che nel dielettrico, anche dopo la scarica, resti fissata buona parte della carica elettrica, e recisamente rifiuta, pure con frasi assai deferenti, la teoria del maestro.

Egli aveva senza alcun dubbio ragione, e rifiutando la teoria del Beccaria, intuì il fenomeno che ora chiamiamo polarizzazione del dielettrico, mentre la elettricità vindice è senz'altro sepolta.

Continuando nelle proprie ricerche in base a queste sue vedute fondamentali, potè giungere ad un risultato che fa epoca nella storia dell'elettrostatica, alla dimostrazione cioè della possibilità di aumentare indefinitamente la carica di un conduttore, approfittando dell'elettricità indotta in un altro. Era un nuovo principio sul quale potevano fondarsi, e si fondarono infatti, subito dopo, gli apparati produttori dell'elettricità.

" Ho costrutto — così egli scrive da Como il 13 giugno 1775 al P. Campi — un piccolo semplicissimo apparecchio che sta tutto rinchiuso in una scatola portatile comodamente in tasca. In questo ho stampato dirò così un'elettricità tale che non si estingue più mai: ce l'ho impressa senz'altro corredo di macchina, e sì ne ho i segni d'ogni maniera, senza dispendio, finchè mi giova averne " (1).

E più oltre: " Insomma quanto si ottiene da una competente macchina io l'ottengo dal mio apparecchio senza ruota, senza giro, senza stropicciamento di sorta a riserva del primo leggerissimo, impiegatovi la prima volta, quando dapprima, ed ha già più di un mese, vi stampai l'elettricità ".

La costruzione dell'elettroforo, comunicata al fisico inglese Priestley con lettera del 10 giugno 1775 (2), procurò al fisico italiano una medaglia d'oro della Società Reale di Londra.

La forma dell'elettroforo voltiano è la più semplice fra le macchine ad induzione, anzi si può dire, dal punto di vista della

(1) Ediz. Naz., vol. III, pag. 91.
(2) Ediz. Naz., vol. III, pag. 93.

praticità, incompleta. Non si deve però credere che egli non abbia avuto il pensiero di perfezionarlo, in modo da renderlo simile alle macchine effettivamente in seguito usate. Leggiamo infatti nella chiusa della citata lettera al Priestley (1):

" Oltre di che io credo non sarà difficile col tempo immaginare dei mezzi per ottenere questo necessario accostamento e discostamento dello scudo più speditamente, e con un moto uniforme e con minor incomodo. Dirò anche che sto mettendo mano ad un meccanismo per venirne a capo „.

Ma poi conclude: " ... Infine io dichiaro col miglior cuore, che non ho l'abilità di riuscir bene in simili costruzioni meccaniche; che d'altra parte non è questo il mio scopo principale; e per quanto io tenga conto, e lo tengano tutti quelli innanzi a cui ho mostrato in esteso le esperienze, dei comodi che ne offre l'elettroforo, io valuto assai più i lumi che mi si vanno svolgendo su diversi punti della teoria elettrica „.

In queste parole si possono dire contenuti i criteri direttivi della ricerca voltiana, che sono sopratutto speculativi e teorici, senza d'altra parte ostentare mai alcun disprezzo per l'applicazione concreta.

Stabiliti i principî fondamentali della sua teoria, fissati così i punti essenziali della sua rappresentazione dei fatti, le ricerche nel campo dell'elettrostatica si sono seguite numerose. L'azione dell'elettroforo è analizzata minutamente sotto ogni punto di vista, e nuove disposizioni vengono immaginate per ottenere grandi accumuli di elettricità con piccoli mezzi, per rivelare quantità piccolissime di elettricità, valutarle e misurarle.

La lettera indirizzata all'illustre Saussure *Sulla capacità dei conduttori*, e la Memoria pubblicata nel 1782 nelle " Philosophical Transactions „ della Società Reale di Londra col titolo: *Del modo di rendere sensibile la più debole elettricità sia naturale che artificiale*, sono modelli perfetti di ricerca sperimentale, ispirate alle più rigorose tradizioni galileiane di precisione e di chiarezza.

L'illustre fisico Arago nella Biografia del Volta letta all'Accademia di Francia nel luglio del 1837, afferma che prima del

(1) Ediz. Naz., vol. III. pagg. 107, 108.

Volta la scienza dell'elettricità era una raccolta di combinazioni complicate senza coordinazione, senza vero carattere scientifico, ma soltanto empirico e descrittivo. E che il primo a lanciarsi fuori da queste ristrette barriere fu il Volta, che trovò l'elettricità dappertutto, in ogni genere di fenomeni, assegnandole un ufficio immenso nei fenomeni terrestri, appena inferiore a quello della gravitazione.

Il giudizio appare ancora esattamente vero, ed ha forse avuto anche maggiori conferme. Poichè se esaminiamo attentamente questa iniziale ricerca voltiana nel dominio dell'elettricità, noi troviamo che la maggior parte dei concetti fondamentali della teoria quali ora noi accettiamo sono stati stabiliti da lui, secondo il suo indirizzo esclusivamente sperimentale, ma con meravigliosa esattezza.

Le sue atmosfere elettriche sono i nostri campi elettrostatici, la capacità elettrica che egli considera è identica alla nostra. La tensione coincide col potenziale, ed egli dimostra che non vi può essere equilibrio quando essa non è costante sopra ogni conduttore isolato. Per ognuna di queste quantità poi egli ricerca con cura minuziosa il metodo di misura, costruisce elettrometri in molte forme, e sperimenta continuamente per graduarli e renderli comparabili, per cui appare come il fondatore dei metodi di misura in elettricità, cioè dell'elettrometria.

Mentre queste teorie sono ora stabilite col calcolo e confermate poi coll'esperienza, il Volta non usò mai la rappresentazione analitica dei fenomeni, ed è arrivato parimenti per via puramente sperimentale a stabilirle con perfetto rigore. Fatto assai significativo e che prova come sia possibile fare della matematica anche senza l'uso delle formule e dei calcoli.

Il Volta ha avuto anzi una singolare avversione alla formula matematica, tanto che in alcuni casi in cui effettivamente se ne serve, tuttavia non la scrive. In certe ricerche sulle tensioni dei vapori, trovate da poco nelle sue carte, è stato ora possibile risalire alla formula solo attraverso i calcoli numerici delle verifiche sperimentali che egli ha eseguite.

Fu in certo modo un geometra della fisica; la sua rappresentazione dei fatti è diretta, non avviene mai col sussidio dell'analisi, il cui uso del resto non era affatto entrato nella teoria dell'elettricità in quei tempi.

Con questo módo di considerare i fenomeni si collegano anche le sue vedute intorno alla legge di Coulomb. Sembra certo che egli abbia affermato per primo che le forze elettriche fossero newtoniane, come risulta dalla risposta dell'abate Nollet:

" ... Personne jusqu'à présent n'a osé l'entreprendre, il serai glorieux pour vous de l'avoir fait avec succès „ (1).

Ma poi ne abbandona l'idea. Soltanto dopo costruita la sua bilancia elettrostatica, che prelude all'elettrometro assoluto di lord Kelvin, torna a sperimentare intorno alla legge dell'attrazione elettrica, come appare dalla seconda lettera al Lichtemberg del 1787, e trova dapprima verificata la legge newtoniana per le attrazioni. Ma per le ripulsioni arriva a risultati incerti, e non si mostra molto convinto delle ricerche di Coulomb, a cui accenna solo una volta in una nota a quella lettera.

Così l'aver sperimentato solo sopra azioni globali di attrazione e ripulsione, all'infuori delle azioni elementari, lo tenne lontano dal successo, a cui giunse invece il fisico francese.

III.

Prima di procedere conviene che ricordiamo alcune date importanti nella carriera scientifica del nostro Fisico.

Nel 1759 l'imperatrice Maria Teresa aveva mandato a governare la Lombardia il conte Carlo di Firmiam, d'origine trentino — era nato a Mezzo lombardo nel 1716 — uomo coltissimo, amico delle scienze e delle arti, raccoglitore egli stesso di opere d'arte e possessore di una ricchissima biblioteca.

Il conte di Firmiam fu il primo protettore di Alessandro Volta, e noi dobbiamo notare questa protezione accordata al giovine fisico come una delle sue alte benemerenze.

Poco dopo le prime pubblicazioni, lo nominò reggente e poi professore di Fisica nel liceo della sua patria, a Como, nel 1776. L'anno successivo gli diede un nuovo segno della sua stima fornendogli i mezzi per un lungo viaggio nella Svizzera a scopo di studio. Il Volta ne profittò largamente, interessandosi di ogni cosa, dei fenomeni naturali e delle istituzioni civili, e

(1) Ediz. Naz., vol. III, pag. 23.

sopratutto stringendo relazioni e amicizie, di cui alcune conservò per tutta la vita. Fra altri conobbe a Ferney il Voltaire.

Finalmente nel 1778 dopo la costruzione dell'elettroforo ed i primi lavori sull'endiometro e sull'aria infiammabile, il Firmiam lo propose per la cattedra di Fisica sperimentale dell'Università di Pavia.

Il primo anno in cui il Volta cominciò ad insegnarvi fu il 1778-79.

Comincia di qui per lui una nuova e più grande attività. Fornito di mezzi di ricerca più ampi, in continuo contatto con uomini di grandissimo valore, quali contava in quel tempo l'Università di Pavia, fra cui emergeva il sommo Spallanzani, egli si trovò nell'ambiente migliore per svolgere le sue grandi qualità.

Le ricerche primitive vengono riprese e perfezionate; il suo spirito sperimentale si esplica in nuove ricerche in campi affini all'elettricità, e sopratutto lo attrae lo studio dell'elettricità atmosferica, per cui propone nuovi mezzi di indagine, e nuove teorie, esposte in quelle memorabili lettere al prof. Lichtemberg di Gottinga, che contengono materiali inesauribili di osservazioni e di idee teoriche.

Ma non è possibile ricordare nemmeno sommariamente tutte queste ricerche, mentre ci sentiamo attratti verso il periodo che può dirsi eroico della sua attività, nel quale tutte le sue più eccelse qualità di pensatore e di sperimentatore, di naturalista e di critico delle teorie altrui, ed anche di polemista, ebbero campo di svolgersi sovranamente, e condurlo al risultato finale della sua grande scoperta e ad una gloria imperitura.

IV.

Nel 1791 nelle Memorie dell'Accademia di Bologna, il professore di Anatomia Luigi Galvani pubblicava un lungo lavoro col titolo: *De viribus electricitatis in Motu musculari Commentarius.* Era il frutto di un intero decennio di esperienze e di meditazioni.

Una copia del *Commentarius* è inviata a Pavia ad un professore di medicina Don Bassano Carminati, che la comunica al collega Volta, invitandolo a ripetere le esperienze dell'anatomico bolognese.

L'impressione che il Volta ne riceve è subito grandissima. Sentiamolo.

" La dissertazione da pochi mesi pubblicata dal Dr Galvani dell'Istituto di Bologna, e Professore in quella Università, celebre per altre scoperte anatomiche e fisiologiche, sull'azione dell'Elettricità nel moto muscolare, contiene una di quelle grandi e luminose scoperte che meritano di far epoca negli annali delle scienze fisiche e mediche, non tanto per ciò che ha in sè stessa di nuovo e di mirabile, quanto perchè apre largo campo di ricerche non meno interessanti che curiose e di utilissime applicazioni " (1).

Così incomincia la Memoria prima sull'Elettricità animale. Il seme gettato dall'illustre anatomico di Bologna era caduto nel terreno più adatto a farlo germogliare ed a portarlo al suo completo e grandioso sviluppo.

Formidabilmente armato di preparazione teorica e sperimentale, pieno di dottrina e di entusiasmo, essere chiamato ad indagare un fatto nuovo e sorprendente, nel campo prediletto dell'elettricità, era una gioia per lui.

Aiutato dal collega prof. Rezia per le preparazioni anatomiche, aveva cominciato dapprima incredulo e poco fiducioso a ripetere le esperienze di Galvani, ma verificati i fatti, eccomi convertito, egli scrive, e passato forse dalla incredulità al fanatismo (2).

Ripete e varia le esperienze in cento modi per studiare sistematicamente il fenomeno, e da fisico provetto, non si accontenta delle apparenze qualitative dell'anatomico, ma immagina metodi opportuni per misurarlo. La teoria di Galvani è dapprima accettata senza restrizioni:

" ... Chi potrà mai dubitare che siano questi moti dei muscoli cagionati da un simile giuoco del fluido elettrico, sbilanciato naturalmente fra l'interiore e l'esteriore di essi muscoli, o tra questi ed i nervi come lo è per arte nelle opposte superficie di una boccetta carica, e portata dal detto arco all'equilibrio? " (3).

(1) Ediz. Naz., vol. I, pag. 13.
(2) Ediz. Naz , vol. I, pag. 26.
(3) Ediz. Naz. vol. I, pagg. 17, § 7.

Così nella Memoria prima sull'Eletttricità animale, che fu un semplice discorso accademico, come usava in quei tempi. Ma nella seconda, ove le questioni sono assai più approfondite, la fiducia nella teoria di Galvani è già scossa, e come scrive il Bosscha, l'erudito olandese che pubblicò ed annotò con tanto amore la corrispondenza fra Volta ed il fisico Van Marum, si vede il cielo sereno delle testimonianze favorevoli ai lavori di Galvani, a poco a poco coprirsi, le nuvole accumularsi, si sente avvicinarsi l'uragano che finirà per distruggere completamente la teoria del maestro bolognese (1).

Egli ha già fatto esperienze decisive. Ha munito due parti vicine di uno stesso nervo della rana di armature di metalli differenti, le ha messe in comunicazione mediante l'arco conduttore, ed ecco prodursi delle forti convulsioni in tutto il membro che dipende da questo nervo.

Dove è la pretesa bottiglia di Leida in questa esperienza? ecco rovesciata la teoria di Galvani. L'essenziale è di far passare l'elettricità lungo un segmento di uno stesso nervo, ed a questo si arriva formando un circuito con due metalli differenti, appoggiati ad uno stesso nervo.

La cosa non è facile a spiegarsi, ma davanti al fatto ogni considerazione teorica si deve arrestare. Egli scrive:

" Non si concepisce troppo neppure come si smuova detto fluido elettrico da un luogo all'altro così vicino dello stesso nervo, per la sola applicazione di quelle armature e comunicazione esterna delle medesime e perchè richiedansi tali armature *dissimili*, ma questo è un fatto che provasi con esperienze dirette " (2).

E ancora in una lettera a Van Marum dell'11 ottobre 1792:

" J'avoue qu'il est difficile de comprendre par quelle cause deux métaux de différente espèce appliqués à deux parties externes de l'animal, même à deux muscles semblables, ou à deux endroits d'un seul et même muscle, troublent le repos du fluide électrique et le déterminent à passer sans cesse d'un terme à l'autre " (3).

(1) Bosscha, *La correspondance de A. V. et M. Van Marum*, pag. 85 (Leiden, A. W. Lijthoff, 1905).
(2) Ediz. Naz., vol. I, pag. 60, § 59.
(3) Ediz. Naz., vol. I, pag. 91.

È interessante notare questi giudizi del Volta sulla propria teoria, poichè mettono in chiaro che alcune delle più gravi obbiezioni che poi furono sollevate nelle lunghe discussioni che seguirono alla scoperta del suo elettromotore, e che non possono ancora dirsi terminate nemmeno ai giorni nostri, egli già le aveva fatte a sè stesso.

Così a poco più di un anno dalla pubblicazione della Memoria di Galvani, il concetto fondamentale voltiano dell'elettricità di contatto era fondato come puro fatto d'esperienza e mentre l'autore stesso confessava le difficoltà teoriche a cui andava incontro adottandolo.

La teoria di Galvani ne risultava colpita in pieno, la battaglia colla scuola di Bologna era impegnata. Ed essa si svolgerà tosto vivacissima, violenta; però sempre combattuta colle armi leali del ragionamento e della esperienza e con grande correttezza di forme.

Lotta memoranda che sovreccita le facoltà speculative e creative dei contendenti, e che porta alfine colui che riesce vincitore ad una scoperta che è delle più grandi nel campo della scienza e che darà all'uomo moderno il dominio di alcune delle più potenti energie della natura.

L'attività del Volta in questo periodo è prodigiosa. Scrive memorie su memorie, corrisponde coi maggiori uomini di scienza d'Italia e d'Europa, centuplica le sue esperienze, allarga, esplora, approfondisce in ogni verso il campo delle sue ricerche, non dimenticando nello stesso tempo di parare ai colpi che gli arrivano da Bologna. Egli è come sospinto da una forza misteriosa e travolgente verso la mèta sublime che farà immortale il suo nome.

Sono di quest'epoca le due Memorie sulle scoperte di Galvani indirizzate a Tiberio Cavallo, fisico italiano residente a Londra; le cinque Memorie sull'Elettricità animale dedicate al prof. Vassalli-Eandi dell'Università di Torino, le lettere all'abate Tomaselli, al prof. Mocchetti, e finalmente le classiche tre Memorie del 1796-97 dirette al prof. Gren di Halle, nelle quali l'intuizione fisica, l'abilità sperimentale e la genialità costruttiva del Volta raggiungono forse la massima altezza.

Anche la forma epistolare, data quasi sempre alle dissertazioni scientifiche, conferisce loro un carattere attraente e sim-

patico, quasi l'autore chiamasse a testimonio od a giudice dei propri ritrovati qualche amico autorevole lontano.

Intanto Galvani e la sua scuola non disarmavano, ed un colpo formidabile e decisivo pensarono di aver portato alla teoria voltiana quando il Dr Eusebio Valli riuscì ad ottenere le commozioni della rana senza alcun intervento di arco metallico.

Il Volta per questo non rinuncia affatto alle sue idee, ma con qualche leggera modificazione alla sua teoria trova modo di farvi rientrare anche il nuovo fenomeno; pur concedendo ai suoi contradditori quanto era ragionevole di concedere.

Finalmente Galvani, giunto al penultimo anno della sua vita, lancia ancora un attacco poderoso contro il suo avversario, sotto forma di un gruppo di lettere sue e del nipote prof. Aldini, dirette a Lazzaro Spallanzani. Volta replicò subito, calmo e pacato come sempre, ma non volle firmare la risposta, che è attribuita ad un cittadino N. N., ed in essa del Volta si parla in terza persona.

Galvani muore il 4 dicembre 1798.

Siamo al coronamento dell'opera.

Finora Volta non ha trattato che questioni teoriche. Scoprire e dimostrare l'esistenza dell'elettricità di contatto, determinarne le leggi colla più rigorosa indagine sperimentale, misurarne gli effetti, è stato il suo còmpito.

Nessun serio accenno ad applicazioni di questi risultati si ha nelle lunghe ricerche durate sette anni, dal 1792 al 1799. Pure la teoria era giunta a tal segno che l'applicazione era matura. Egli non dice quando abbia pensato dapprima al suo elettromotore. È la lettera al professore Joseph Banks, letta alla Società Reale di Londra, il 26 giugno 1800, che annuncia al mondo il miracolo compiuto.

Ecco come vi era giunto.

Dimostrata l'esistenza della forza elettromotrice di una coppia di metalli diversi, sorgeva naturale l'idea di tentare una combinazione di queste coppie per ottenere una forza elettromotrice più grande. L'esperienza prova che non è possibile, ed egli se ne rende ragione, in base alla sua teoria.

" Se si succedessero i detti metalli in serie alternate si rende chiaro che ogni piastrella di zinco trovandosi in contatto, sopra e sotto, a due di argento e quindi le forze che spingono

il fluido elettrico da questo a quel metallo essendo in opposizione, si eliderebbero esse vicendevolmente, in guisa che non avanzerebbe da tal contatto altro che quella piccola forza che corrisponde all'azione di una coppia sola nel caso che una serie cominciasse con un metallo e finisse coll'altro, e niuna forza affatto, nel caso che la prima e l'ultima piastra fossero del medesimo metallo „ (1).

Il problema così posto si presentava insolubile. Ma le lunghe ricerche sui conduttori di seconda classe dovevano soccorrerlo e portarlo a superare la difficoltà che sembrava invincibile.

Se dopo il primo contatto diretto, argento-zinco, che produceva una forza elettromotrice misurata da 1/60 di grado al suo elettrometro, veniva evitato il secondo contatto zinco-argento colla interposizione di un conduttore di seconda classe, egli trovò che la tensione del primo zinco si trasportava pressochè inalterata sull'argento della seconda coppia; cosicchè al nuovo contatto argento-zinco subiva un nuovo aumento uguale al primo. Il suo elettromotore segnava 2/60 di grado.

Così ripetendo, con tale artificio, la sovrapposizione delle coppie, potè produrre nella tensione un aumento proporzionale al loro numero. Il problema era risolto. Bastava porre in comunicazione con un arco conduttore la prima e l'ultima lamina metallica, e la corrente non più istantanea e violenta, ma continua, e costante fluiva lungo di esso.

“ Questo è il gran passo da me fatto sulla fine del 1799, passo che mi ha condotto ben tosto alla costruzione del nuovo apparato scuotente, il quale ha cagionato tanto stupore a tutti i fisici, a me grande soddisfazione, ma stupore non molto dopo l'anzidetta scoperta che mi prometteva bene un tale successo „ (2).

Così egli scrive qualche tempo dopo, con una grande semplicità, ma che è pure una implicita affermazione del suo valore. I fisici ammirano e si meravigliano: non Lui, che si sente pari alla sua scoperta, poichè l'ha chiaramente prevista, sapientemente preparata, fortemente voluta.

Parlare delle conseguenze della scoperta voltiana sarebbe rifare gran parte della storia delle scienze fisiche e chimiche

(1) Ediz. Naz., vol. II, pag. 60, § XXII.
(2) Ediz. Naz., vol. II, pag. 59, § XX.

di tutta la nostra epoca. L'elettrolisi, l'elettro-magnetismo, la termo-elettricità, la induzione colle loro infinite applicazioni ed anche le onde elettro-magnetiche che ora trasvolano da un continente all'altro, sono rami spuntati sull'albero della scoperta voltiana.

Nel campo applicativo poi buona parte della nostra vita è ora governata dall'elettricità; luce, moto, calore ci vengono direttamente dalla corrente o per azione sua indiretta. Le relazioni fra gli uomini tutti sono diventate più intense, la vita dell'umanità ha acquistata una pulsazione più alta.

La scoperta avrebbe potuto ritardare di un secolo o la storia della scienza ed anche la nostra civiltà avrebbero avuto uno svolgimento diverso.

Come italiani godiamo profondamente che due uomini nostri, Volta e Galvani, pure così diversi, pure così discordi, abbiano portato tanta luce all'umanità.

E in questa luce serena e benefica possiamo ora pensarli come riconciliati fra loro.

V.

Non è raro il caso nella storia delle scienze di scoperte anche fondamentali, che hanno avuto solo un tardivo riconoscimento, attraverso a discussioni e contrasti, che amareggiarono l'animo di celebri inventori.

Non fu così della pila. Il riconoscimento della sua importanza immensa nel campo delle scienze e delle applicazioni fu, si può dire, immediato, ed ebbe una consacrazione così solenne e grandiosa, quale forse non toccò mai ad altro trovato dell'umano ingegno.

Nell'ottobre del 1801 Alessandro Volta, accompagnato dall'amico e collega suo, il distinto chimico Luigi Brugnatelli, è presentato a Parigi all'Istituto di Francia. Una commissione è nominata per lo studio dei nuovi trovati, ne fanno parte Laplace, Coulomb, Monge, Charles, Vauquelin, Hallé e Biot, relatore. I due italiani sono aggiunti alla Commissione.

In tre memorande sedute, il 28 ottobre, il 12 ed il 22 novembre, Volta espone le sue teorie e ne dà le dimostrazioni sperimentali. A tutte le sedute assiste il primo Console Bona-

parte, pieno d'ammirazione e d'entusiasmo per la grande scoperta, ed intorno a lui sono i maggiori uomini di quell'età, splendida per le scienze sperimentali e speculative. Sono fra essi due sommi, Laplace e Lagrange.

Il 2 dicembre Biot legge la relazione della Commissione e immediatamente dopo, su proposta di Bonaparte, l'Istituto vota per acclamazione una medaglia d'oro a Volta, come attestato di riconoscenza della scienza francese.

Un premio annuo è pure fondato per le ricerche elettriche ed un grande premio di 60.000 franchi per colui che " par des expériences et des découvertes, fera faire à l'électricité et au galvanisme un pas comparable à celui qu'ont fait faire à ces sciences Franklin et Volta „.

Napoleone, dice l'Arago nell'Elogio del nostro Fisico, letto all'Istituto di Francia, considerava Volta come il tipo dell'uomo di genio, e la sua ammirazione ed i suoi favori per lui continuarono finchè l'astro suo brillò nel cielo politico d'Europa.

Così il trionfo di Volta fu completo. Ed egli lo visse con soddisfazione certo, ma anche con tranquillità d'animo perfetta. In quei giorni gloriosi da Parigi egli scriveva affettuosamente a sua moglie a Como, il 10 dicembre 1801:

" In mezzo a tante cose che devono farmi piacere, e che sono fin troppo lusinghiere, io non mi invanisco a segno di credermi di più di quel che sono: ed alla vita agitata da una vana gloria preferisco la tranquillità e la dolcezza della vita domestica „.

VI.

La gloria della pila ha fatto passare come in seconda linea, nello svolgersi del tempo, le altre minori opere voltiane. L'immensa ripercussione che essa ha avuto nel campo scientifico ha gettato come un'ombra sopra risultati che non dobbiamo dimenticare, sia per equità verso il grande fisico, sia per ragioni di dignità nazionale, che non permettono che ciò che egli vide e trovò passi ad arricchire il patrimonio scientifico di altre nazioni.

Egli camminava del resto così sicuro sulla via della realtà, che ovunque volgesse lo sguardo, quasi senza volerlo, intuiva nuove verità o fatti nuovi. Come quando prevedeva le lunghe file di pali reggenti attraverso le campagne il filo conduttore

della energia elettrica, o pensava al bel spettacolo di un conduttore luminoso perpetuo irradiante nel vuoto, quale noi ora, centuplicato, godiamo ogni sera. Ma sopratutto conviene ricordare fra le sue indagini minori quella compiuta nel 1793 intorno alla dilatazione dell'aria atmosferica, mentre già era iniziata la contesa sull'elettricità animale, che ha risolto definitivamente un problema, intorno al quale si erano inutilmente affaticati fisici di valore, specialmente il De Luc. Scoperta la causa di errore nell'imperfetta secchezza dell'aria sperimentata, egli riuscì a dimostrarne l'uniformità della dilatazione colla temperatura, ed a trovare pel coefficente di dilatazione il valore 1:200 per gradi Réaumur, assai prossimo a quello determinato più tardi con mezzi assai perfezionati di indagine.

Pertanto questa costante fisica, che porta alla definizione dello zero assoluto di temperatura, è del Volta e dovrebbe portare il suo nome, mentre viene generalmente legata alle leggi di Gay-Lussac e Dalton i quali ne hanno esteso il significato agli altri gas.

Nè egli fu un esclusivo fisico di laboratorio, ma ebbe anche spirito largo di naturalista. Le prime indagini sul gas delle paludi, da lui scoperto, le ricerche sull'elettricità atmosferica, i lunghi viaggi attraverso l'Europa, lo portarono ad osservare una quantità di fatti naturali non solo con spirito fisico, che non l'abbandonava mai, ma anche con occhio di naturalista appassionato e di ammiratore di ogni bellezza naturale.

La coltura letteraria giovanile, la consuetudine con i colleghi naturalisti italiani, le affettuose amicizie con molti stranieri, avevano alimentato in lui queste mirabili attitudini. Così che alcune relazioni dei suoi viaggi attraverso le Alpi e la Svizzera, inviate all'amico Conte di Firmiam, sono splendidi esempi di letteratura scientifica, e preludono a quelle classiche dei Saussure, dei Tyndall, del nostro Stoppani.

E quando Orazio Benedetto Saussure compie l'ascensione del Monte Bianco si commove d'entusiasmo per l'amico ginevrino, la sua musa giovanile si ridesta, e compone una lunga ode magnificante la grande ascensione.

Non a torto perciò un brillante naturalista nostro, il Cermenati (1), pone il Volta fra quella eletta schiera di scienziati

(1) M. Cermenati, *A. V. alpinista*. " Boll. del Club Alpino ital. ", 1899.

dall'anima d'artisti, che cominciarono a sentire ed a far comprendere quante fonti d'infiniti godimenti intellettuali ed estetici si possano trovare in quel mondo alpino, che tante generazioni precedenti avevano negletto o temuto, quasi mai ammirato; e che intuirono nelle Alpi una palestra per tutte le più elevate energie.

VII.

Nell'aula di Fisica dell'Università di Pavia, sotto il busto che raffigura il Grande nostro, si legge:

Alexander Volta — in re electrica princeps

. . . .

naturae interpres et aemulus.

L'omaggio dei contemporanei non poteva essere più alto, più conciso, più significativo. Noi posteri ammirando ora ingigantito l'edificio di cui egli ha posto la prima base sicura, ci sentiamo come trasportati in un'atmosfera superiore, ci sentiamo riconfortati come italiani, pensando che ad ogni grande svolta della civiltà e della storia s'incontra dominatore un uomo della nostra stirpe, si chiami Dante o Leonardo, Colombo o Galileo, Volta o Napoleone. E un sentimento profondo ci invade delle forze potenti che sono in questo antico nostro sangue italico e ci concede di lanciare verso l'avvenire uno sguardo di sicurezza e di fede.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 20 Febbraio 1927

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Guidi, Boggio e Somigliana che funge da Segretario.

Scusano l'assenza i Soci: Parona, Mattirolo, Panetti e Sacco.

Si legge il verbale della seduta precedente, che viene approvato senza osservazioni.

Il Presidente comunica:

Un invito dell'American Philosophical Society di Filadelfia per la celebrazione del 2° centenario della sua fondazione che avrà luogo nell'aprile dell'anno corrente.

L'Accademia delibera di aderire.

Una circolare del Comitato pro ricordo marmoreo a Gian Domenico Cassini.

Un invito del Direttore della R. Scuola d'Ingegneria di Torino a partecipare alle Onoranze al prof. Guido Grassi in occasione del suo collocamento a riposo.

L'Accademia delibera di partecipare a tali Onoranze rese al suo benemerito Socio.

Il Programma provvisorio del Congresso internazionale di Zoologia che si terrà a Budapest dal 4 al 9 settembre di quest'anno.

Il Socio Somigliana presenta una sua Nota, *Sulle relazioni che esistono fra le costanti geoidiche ed i valori della gravità*, pubblicata nei “Rendiconti dell'Accademia dei Lincei„ del 1° semestre 1927, e ne riassume il risultato principale, che consiste nella dimostrazione della possibilità di arrivare alla determinazione delle costanti del geoide, supposto ellissoidico di rotazione, mediante sole misure di gravità e di latitudine.

Il medesimo presenta quindi per la inserzione negli *Atti* altra sua Nota intorno allo stesso argomento avente per titolo: *Sulla determinazione delle costanti del geoide mediante misure di gravità*, e ne parla brevemente.

LETTURE

Sulla determinazione delle costanti del geoide mediante misure di gravità.

Nota del Socio naz. resid. CARLO SOMIGLIANA

I.

In una Nota recentemente pubblicata nei " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ([1]) ho dimostrato che, nell'ipotesi di un geoide ellissoidico di rotazione, fra tre valori della gravità, corrispondenti a tre valori differenti della latitudine, sussiste sempre una relazione lineare omogenea, che è la seguente:

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad & g_1 (\cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_3) \sqrt{1 + i^2 \cos^2 \varphi_1} + \\
& + g_2 (\cos^2 \varphi_3 - \cos^2 \varphi_1) \sqrt{1 + i^2 \cos^2 \varphi_2} + \\
& + g_3 (\cos^2 \varphi_1 - \cos^1 \varphi_2) \sqrt{1 + i^2 \cos^2 \varphi_2} = 0
\end{aligned}
$$

dove

g_1, g_2, g_3 sono i valori della gravità corrispondenti alle latitudini $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$; per le quali possiamo supporre che siano comprese fra 0 e 90°; ed inoltre $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$. Finalmente i^2 è la costante che ho chiamata eccentrità aggiunta

$$
i^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2} = \frac{e^2}{1 - e^2}
$$

essendo a l'asse maggiore, c l'asse minore ed e l'eccentricità vera.

([1]) *Sulle relazioni che esistono fra le costanti geoidiche ed i valori della gravità,* vol. V, serie 6ª, gennaio 1927.

Per semplicità di scrittura introdurremo la notazione

$$z_h = \sqrt{1 + i^2 \cos^2 \varphi_h} \quad [1] \qquad h = 1, 2, 3$$

e porremo inoltre

$$a_1 = \cos^2 \varphi_2 - \cos^2 \varphi_3 \qquad a_2 = \cos^2 \varphi_3 - \cos^2 \varphi_1$$
$$a_3 = \cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2 .$$

Nell'ipotesi fatta sarà

$$(2) \qquad a_1 > 0 \qquad a_2 < 0 \qquad a_3 > 0$$

e la relazione (1) diviene

$$(3) \qquad a_1 g_1 z_1 + a_2 g_2 z_2 + a_3 g_3 z_3 = 0$$

che può essere considerata come un'equazione che determina l'eccentricità i in funzione di tre valori qualunque della gravità e delle corrispondenti latitudini.

È appunto della possibilità di questa determinazione che vogliamo anzitutto occuparci.

L'equazione (3) può essere resa razionale quadrando due volte. Si ottiene così

$$(a_1^2 g_1^2 z_1^2 + a_3^2 g_3^2 z_3^2 - a_2^2 g_2^2 z_2^2)^2 = 4 a_1^2 a_3^2 g_1^2 g_3^2 z_1^2 z_3^2$$

equazione che è della forma

$$L i^4 + M i^2 + N = 0$$

ove L, M, N dipendono dai tre valori della gravità e della latitudine; e quindi il quadrato dell'eccentricità potrà determinarsi colla risoluzione di un'equazione di secondo grado.

---

[1] Queste quantità z_h risultano inversamente proporzionali alle radici cubiche dei raggi di curvatura dell'ellisse meridiana nei punti di latitudine φ_h.

La forma precedente non è però la più opportuna per una discussione intorno alla risolubilità di questa equazione. Osserviamo invece che dalle relazioni precedenti risulta

$$z_2^2 - z_3^2 = i^2 a_1 \qquad z_3^2 - z_1^2 = i^2 a_2 \qquad z_1^2 - z_2^2 = i^2 a_2$$

e quindi

$$a_1 z_1^2 + a_2 z_2^2 + a_3 z_3^2 = 0. \tag{4}$$

Possiamo quindi prendere in considerazione il sistema delle tre equazioni (3), (4), che ponendo

$$x = \frac{z_1}{z_3} \qquad y = \frac{z_2}{z_3}$$

divengono

$$a_1 x^2 + a_2 y^2 + a_3 = 0$$
$$a_1 g_1 x + a_2 g_2 y + a_3 g_3 = 0$$

mentre

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$

Quando sia nota l'una o l'altra delle incognite x od y, avremo subito i^2 linearmente, poichè

$$i^2 = \frac{1 - x^2}{x^2 \cos^2 \varphi_3 - \cos^2 \varphi_1} = \frac{1 - y^2}{y^2 \cos^2 \varphi_3 - \cos^2 \varphi_2}.$$

Eliminando y fra le due equazioni precedenti troviamo per la x l'equazione

$$a_1 (a_1 g_1^2 + a_2 g_2^2) x^2 + 2 a_1 a_3 g_1 g_3 x + a_3 (a_2 g_2^2 + a_3 g_3^2) = 0 \tag{5}$$

il cui discriminante è

$$\Delta = a_1^2 a_3^2 g_1^2 g_3^2 - a_1 a_3 (a_1 g_1^2 + a_2 g_2^2)(a_2 g_2^2 + a_3 g_3^2)$$

ossia

$$\Delta = - a_1 a_2 a_3 (a_1 g_1^2 + a_2 g_2^2 + a_3 g_3^2).$$

La positività di Δ dipende quindi dalla positività del trinomio

$$a_1 g_1^2 + a_2 g_2^2 + a_3 g_3^2 = a_3 (g_3^2 - g_2^2) - a_1 (g_2^2 - g_1^2).$$

Ora dalla formola generale che dà la gravità in funzione della latitudine (cfr. la Nota citata in principio) si hanno le relazioni

$$g_h = A z_h + \frac{B}{z_h} \qquad h = 1, 2, 3$$

ove A, B sono costanti di cui, per lo scopo che abbiamo di mira, non importa richiamare il significato. Si trova così facilmente

$$g_3^2 - g_2^2 = - i^2 a_1 A^2 + \frac{B^2 i^2 a_1}{z_2^2 z_3^2}$$

$$g_2^2 - g_1^2 = - i^2 a_3 A^2 + \frac{B^2 i^2 a_3}{z_1^2 z_2^2}$$

da cui

$$(g_3^2 - g_2^2) a_3 - (g_2^2 - g_1^2) a_1 = i^2 a_1 a_3 \frac{B^2}{z_2^2} \left(\frac{1}{z_3^2} - \frac{1}{z_1^2} \right)$$

ed il secondo membro è sempre positivo, poichè

$$z_1 > z_2 > z_3 ; \qquad a_1 > 0 \qquad a_3 > 0.$$

L'equazione (5) ha quindi sempre radici reali. Si ha così un procedimento generale per la risoluzione del problema della determinazione dell'eccentricità mediante tre valori qualisiansi della gravità, purchè differenti.

Resta la quistione della duplicità del valore per la x, che risulta dalla risoluzione dell'equazione (5). Ora nei casi concreti non è difficile eliminare l'una o l'altra delle due radici, in base a qualcuna delle proprietà, a cui devono soddisfare secondo il loro significato geometrico. Ciò apparirà meglio dai casi speciali che ora considereremo.

II.

Supponiamo che due dei punti considerati siano rispettivamente al polo ed all'equatore, mentre il terzo corrisponde ad una latitudine φ intermedia qualunque. Poniamo cioè

$$\begin{array}{llll} \varphi_1 = 0 & \cos^2 \varphi_1 = 1 & g_1 = g_e & a_1 = \cos^2 \varphi \\ \varphi_2 = \varphi & \cos^2 \varphi_2 = \cos^2 \varphi & g_2 = g & a_2 = -1 \\ \varphi_3 = \frac{\pi}{2} & \cos^2 \varphi_3 = 0 & g_3 = g_p & a_3 = \operatorname{sen}^2 \varphi . \end{array}$$

L'equazione (1) prende la forma

$$g\sqrt{1+i^2\cos^2\varphi}=g_e\cos^2\varphi\sqrt{1+i^2}+g_p\,\mathrm{sen}^2\,\varphi.$$

Giova in questo caso prendere come incognita la quantità

$$j=\sqrt{1+i^2}=\frac{a}{c}$$

a cui si riduce la x precedentemente considerata.

Si ha così

$$g\sqrt{j^2\cos^2\varphi+\mathrm{sen}^2\,\varphi}=j\,g_e\cos^2\varphi+g_p\,\mathrm{sen}^2\,\varphi \tag{6}$$

formola notevole per determinare la gravità ad una latitudine qualunque in funzione della gravità al polo ed all'equatore e che può essere anche scritta

$$g=\frac{a\,g_e\cos^2\varphi+c\,g_p\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+c^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi}} \tag{7}$$

dalla quale risulta una formola ben nota nel caso che sia $a=c$.

La (6) ridotta razionale dà per determinare j

$$\begin{aligned}(g^2-g_e^2\cos^2\varphi)\,j^2-2g_e\,g_p\,j\,\mathrm{sen}^2\,\varphi&+\\+(g^2-g_p^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi)\,\mathrm{tg}^2\,\varphi&=0.\end{aligned} \tag{8}$$

Pel discriminante Δ abbiamo, con facili riduzioni,

$$\Delta=(g_e^2\cos^2\varphi+g_p^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi-g^2)\,g^2\,\mathrm{tg}^2\,\varphi,$$

e che sia sempre positivo risulta subito dalla formola (7). Difatti se consideriamo i due vettori U, V le cui componenti siano

$$\begin{aligned}U_1&=g_e\cos\varphi & V_1&=a\cos\varphi\\ U_2&=g_p\,\mathrm{sen}\,\varphi & V_2&=c\,\mathrm{sen}\,\varphi\end{aligned}$$

dalla (7) abbiamo

$$g\sqrt{V_1^2+V_2^2}=U_1V_1+U_2V_2=UV\cos(UV)$$

e quindi

$$\Delta = g^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \, U^2 \operatorname{sen}^2 (UV).$$

Perciò l'equazione (8) ha sempre radici reali, qualunque sia φ, come del resto già abbiamo dimostrato nel caso generale.

Risolvendo la (8) troviamo

$$(9) \qquad j = \frac{g_e g_p \operatorname{sen}^2 \varphi}{g^2 - g_e^2 \cos^2 \varphi} \pm \frac{g \operatorname{tg} \varphi}{g^2 - g_e \cos^2 \varphi} \sqrt{\Delta_1}$$

dove

$$\Delta_1 = g_e^2 \cos^2 \varphi + g_p^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - g^2.$$

Osservando che l'equazione (8) rientra in sè stessa, scambiando fra loro g_e, g_p; $\cos \varphi$, $\operatorname{sen} \varphi$, e mutando j in $\frac{1}{j}$, troviamo anche

$$(10) \qquad \frac{1}{j} = \frac{g_e g_p \cos^2 \varphi}{g^2 - g_p^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \mp \frac{g \operatorname{cotg} \varphi}{g^2 - g_p \operatorname{sen}^2 \varphi} \sqrt{\Delta_1}$$

relazioni che si possono facilmente verificare tenendo conto della identità

$$(g_e g_p \operatorname{sen}^2 \varphi + g \operatorname{tg} \varphi \sqrt{\Delta_1}) (g_e g_p \cos^2 \varphi - g \operatorname{cotg} \varphi \sqrt{\Delta_1}) =$$
$$= (g_e^2 \cos^2 \varphi - g^2) (g_p^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - g^2).$$

Dalle due equazioni (9), (10) potremo quindi avere rispettivamente il valore del rapporto $\frac{a}{c}$ oppure $\frac{c}{a}$.

Per vedere come si possa decidere del doppio segno che compare nelle formole precedenti consideriamo il caso in cui $\varphi = 45^\circ$.

L'equazione (6) indicando con g_q il valore della gravità a questa latitudine diviene

$$g_q \sqrt{2(j^2 + 1)} = g_e j + g_p$$

e la (8)

$$(2 g_q^2 - g_e^2) j^2 - 2 g_p g_e j + 2 g_q^2 - g_p^2 = 0$$

e si ha quindi

$$j = \frac{g_p g_e}{2g_q^2 - g_e^2} \pm \frac{2g_q}{2g_q^2 - g_e^2} \sqrt{\frac{1}{2}(g_p^2 + g^2) - g_q^2}\,.$$

Per il prodotto delle due radici j_1, j_2 si ha

$$j_1 j_2 = \frac{2g_q^2 - g_p^2}{2g_q^2 - g_e^2} < 1$$

poichè $g_e < g_p$. Delle due radici quindi soltanto una potrà essere maggiore della unità e rappresentare il rapporto del semiasse maggiore al minore. Avremo perciò in questo caso

$$\frac{a}{c} = \frac{g_p g_e}{2g_q^2 - g_e^2} + \frac{2g_q}{2g_q^2 - g_e^2} \sqrt{\frac{1}{2}(g_p^2 + g_e^2) - g_q^2}$$

e quindi anche per la formola a cui ora si riduce la (10)

$$\frac{c}{a} = \frac{g_p g_e}{2g_q^2 - g_p^2} - \frac{2g_q}{2g_q^2 - g_p^2} \sqrt{\frac{1}{2}(g_p^2 + g_e^2) - g_q^2}\,.$$

La quistione della determinazione dello schiacciamento terrestre in funzione dei valori della gravità al polo, all'equatore ed alla latitudine di 45° è quindi completamente risolta.

III.

Si presenta ora naturale la domanda, se queste nuove relazioni trovate fra i valori della gravità siano effettivamente verificate dai valori ordinariamente accettati, come risultato delle misure.

Una tale verifica si presenta anche come assai interessante, poichè, essendo la nostra teoria completamente rigorosa, indipendente cioè da ipotesi speciali e da qualsiasi approssimazione, ogni eventuale discordanza dai valori osservati non potrà essere attribuita che ad effettive differenze del geoide reale dal geoide regolare ellissoidico di rotazione, pel quale valgono le formole trovate, senza alcuna limitazione. E potrà quindi essere eventualmente utilizzata nella ricerca di queste differenze.

Meno probabile è che differenze possano provenire da imprecisione delle misure di gravità, avendo queste ormai raggiunto un altissimo grado di esattezza.

Ad ogni modo, poichè ogni terna di valori della gravità può essere sottoposta al controllo della nostra formola fondamentale (1), viene così aperto un largo campo di verifiche, al quale speriamo venga rivolta l'attenzione degli specialisti della gravimetria, e particolarmente dei valorosissimi che abbiamo ora in Italia.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

Il Socio Pochettino, interpretando il desiderio dei Soci presenti, e facendo seguito ad una proposta già da lui presentata in precedente adunaza, in omaggio alle disposizioni dello Statuto accademico, si onora di riproporre la nomina di S. A. R. il Duca degli Abruzzi a Socio residente della R. Accademia, in riguardo alle sue altissime brillanti benemerenze scientifiche, per le quali già l'Accademia gli assegnava il *Premio Bressa* per il triennio 1899-1902.

Il Presidente, elogiando l'opportunissima proposta, ritiene che data l'importanza della nomina e i meriti eccezionali dell'Augusto Candidato, si addivenga, meglio che per acclamazione, alla nomina, seguendo il disposto dello Statuto per la nomina dei Soci residenti.

Egli quindi ritiene che l'Accademia, preso atto della proposta, si debba riunire in una adunanza successiva per la regolare votazione di nomina, seguendo così la procedura ordinaria.

A questa proposta del Presidente, intesa a concedere maggiore dignità e importanza all'atto di nomina, si associa il Socio D'Ovidio, coll'approvazione di tutti i Soci, desiderosi di offrire all'augusto e beneamato Principe un attestato degno del suo alto valore scientifico, universalmente noto e ammirato.

L'adunanza è quindi dichiarata chiusa alle ore 11.

LETTURE

Azione degli alcali sull'α-trinitrotoluene (TNT).

Nota di MICHELE GIUA e GIULIO REGGIANI
presentata dal Socio naz. resid. F. Garelli

PARTE GENERALE

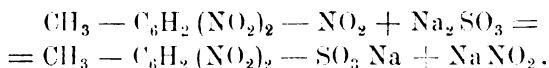
L'estesa applicazione come esplosivo dell'α-trinitrotoluene rende la chimica di questo composto particolarmente interessante; il suo comportamento verso gli alcali assume non lieve importanza dal punto di vista teorico, perchè ancora regna molta incertezza sulle trasformazioni più o meno profonde che gli alcali, sia inorganici che organici, producono sui polinitrocomposti. Ciò spiega anche il perchè sieno molto numerose le ricerche sperimentali sull'argomento che forma oggetto di questa Nota. Oltre che dalla presenza dei tre gruppi nitrici in posizione simmetrica, la reattività del TNT con gli alcali viene aumentata dalla presenza di un gruppo metilico in posizione para ad un gruppo nitrico.

Non è il caso di descrivere qui le ricerche di Wilbrand (¹), Hantzsch e collaboratori (²), Busch e Kogel (³), W. Will (⁴) e di altri (⁵) sul comportamento del TNT cogli alcali, come pure con gli alcoolati di sodio e di potassio. Queste reazioni assumono anche importanza per la stessa industria del TNT, specialmente per la purificazione di questo prodotto. È noto come l'industria del TNT debba fornire alla Guerra e alla Marina due qualità

(¹) "Ann. Chem. „, *128*, 178 (1863).
(²) "Ber. chem. Gesell. „, *32*, 3137 (1899); *42*, 2119 (1909).
(³) Ivi, *43*, 1549 (1910).
(⁴) Ivi, *47*, 712 (1914).
(⁵) M. Giua, "Gazz. Chim. Ital. „, *45*, II, 562 (1915); *Chimica delle sostanze esplosive*, pag. 151 e seg.; M. Copisarow, "Chem. News „ *122*, 283 (1915).

di TNT, una distinta con la denominazione di *TNT alto punto*, l'altra con *TNT basso punto*. Le due qualità si differenziano a seconda della loro purezza, in quanto il *TNT alto punto* si può considerare come chimicamente puro, mentre il *TNT basso punto* contiene sempre almeno due isomeri del TNT e precisamente i derivati β e γ, provenienti dalla nitrazione del m-mononitrotoluene, che si forma sempre, per quanto in piccola quantità, nel processo di nitrazione diretta del toluene.

Per ottenere il *TNT alto punto*, nella tecnica si seguono diverse vie: una consiste nel nitrare il toluene in due fasi, di cui la prima conduce al cosidetto *binitrotoluene solido* (miscuglio dei due isomeri 1, 2, 4 e 1, 2, 6) unitamente all'*olio di sgocciolamento* (miscuglio di mono-, bi- e trinitrotolueni). Il *binitrotoluene solido* porta con un'ulteriore nitrazione al *TNT alto punto*, mentre dall'olio di sgocciolamento si perviene sempre a *TNT basso punto*. L'altra via, seguìta particolarmente in Inghilterra, Francia e S. U. A., consiste nel nitrare in modo continuo il toluene, ottenendo del *TNT basso punto*, che poi si purifica o con la cristallizzazione da solventi organici (alcool, toluene-etere di petrolio, ecc.), oppure con lavaggi di soluzioni di solfito alcalino. Quest'ultimo metodo, di origine americana, fu descritto negli ultimi anni da H. Muraour [1], ma fu applicato durante la guerra in Inghilterra [2]. L'impiego del solfito alcalino è fondato sulla reazione, già scoperta dal Laubenheimer [3], che i polinitroderivati aromatici contenenti un gruppo nitrico labile, sostituiscono facilmente questo gruppo con quello solfonico. Ora, se il TNT greggio, che ha un punto di fusione inferiore a quello corrispondente al prodotto puro, a causa specialmente della presenza degli isomeri β e γ — che contengono il gruppo nitrico in posizione 3 labile — si tratta con una soluzione di solfito di sodio, si possono eliminare dal TNT questi due isomeri, trasformandoli nei sali (solubili in acqua) degli acidi dinitrotolilsolfonici, in base alla reazione seguente:

$$CH_3 - C_6H_2(NO_2)_2 - NO_2 + Na_2SO_3 =$$
$$= CH_3 - C_6H_2(NO_2)_2 - SO_3Na + NaNO_2 .$$

(1) “Bull. Soc. Chim.„ [4] *35*, 367 (1924).
(2) “Technical Records of Explosives Supply„, N. 2, London, 1920.
(3) “Ber. chem. Gesell.„, *15*, 597 (1882).

Poichè l'impiego del solfito sodico puro aumenta il costo di produzione del TNT, in Inghilterra si usarono le liscivie solfitiche, residue della preparazione del fenolo sintetico, che contengono notevoli quantità di idrossido alcalino. Nella purificazione del TNT greggio si deve però escludere l'uso di queste liscivie, perchè gli alcali attaccano profondamente anche la molecola del TNT, dando origine a composti salini molto sensibili al calore e all'urto [1]. Inoltre, circa l'impiego del solfito sodico puro non è senza valore l'osservazione (specialmente per le nazioni, come l'Italia, prive di carbon fossile e quindi di idrocarburi aromatici) che il togliere dal TNT greggio i due trinitrotolueni β e γ esclude dall'impiego pratico una certa quantità di esplosivo, che può trovare applicazione sia nelle miscele con nitrati inorganici, sia nello stesso *TNT basso punto*, in quanto i trinitrotolueni β e γ hanno caratteristiche esplosive analoghe a quelle del TNT. Da ciò si può facilmente concludere che la via più pratica per la preparazione del TNT è quella di nitrare dapprima il toluene a binitrotoluene, riservando il *binitrotoluene solido* per la trasformazione in *TNT alto punto* e utilizzando i prodotti secondarî (olio di sgocciolamento) per ottenere il *TNT basso punto.*

Queste considerazioni, unitamente all'importanza teorica dell'argomento, ci hanno spinto a studiare, in modo più completo di quello che finora non si sia fatto, il comportamento del TNT verso alcuni mezzi alcalini. In questa Nota riferiamo sopra alcuni risultati ottenuti usando l'ammoniaca e l'etilato sodico come agenti alcalini e l'acetone come solvente del TNT.

PARTE SPERIMENTALE

I. — **Azione dell'etilato sodico sul TNT.**

A) *Preparazione del monoalcoolato* (1 mol. TNT + 1 mol. C_2H_5ONa). — A gr. 5 di trinitrotoluene, cristallizzato dal benzolo, sciolti in 50 cc. di acetone, si addizionano gr. 0,5 di sodio sciolti in 20 cc. di alcool etilico. Si nota un aumento di tempe-

[1] Da una breve notizia della *Chemiker Zeitung* (1925, pag. 808) apprendiamo che il Dr. R. Gärtner, tecnico dell'industria degli esplosivi, è pure contrario all'impiego del solfito sodico nella purificazione del TNT.

ratura di 4° C. Si ottiene subito una intensa colorazione rosso-viola cupo e si separano grumi di precipitato. Per evaporazione dell'eccesso di solvente si ottiene una massa cristallina rosso-scura che viene purificata con ripetuti lavaggi di acetone ed etere (nei quali solventi si dimostra poco solubile). Per completare la purificazione questo sale è stato lavato con etere assoluto in estrattore Soxhlet per 8 ore. La sostanza fu quindi tenuta in essicatore su acido solforico fino a peso costante.

Gr. 0,1460 di sostanza dettero cc. 17,7 di N ($t = 14,2$, $H = 749$)
„ 1,0225 „ „ gr. 0,2602 di Na_2SO_4
per $C_7H_5O_6N_3 + C_2H_5ONa$: calcolato %: N 14,23; Na 7,7;
trovato %: „ 14,21; „ 8,12.

Il sale ha un colore rosso-viola; riscaldato su lamina di platino non fonde, ma deflagra violentemente. È molto solubile in acqua, insolubile in acetone, etere, benzene ed etere di petrolio.

Con acido solforico concentrato dà una colorazione giallo-bruna. Con acidi diluiti, dalla soluzione acquosa precipita una sostanza gelatinosa, e nella soluzione filtrata si nota la presenza dell'acido nitroso.

B) *Preparazione del bialcoolato* (1 mol. TNT + 2 mol. C_2H_5ONa). — A gr. 5 di trinitrotoluene sciolti in 50 cc. di acetone si aggiungono gr. 1 di sodio sciolti in 40 cc. di alcool etilico. Si nota un aumento di temperatura (6° C.).

Appare subito una colorazione rosso-bruna, mentre precipita una sostanza cristallina. Il precipitato, filtrato alla pompa e lavato con acetone, viene ancora lavato in apparecchio Soxhlet con etere assoluto per 8 ore circa. Quindi viene seccato su acido solforico.

Gr. 0,0905 di sostanza dettero cc. 8,7 di N ($t. = 12°$, $H = 747$)
„ 0,3411 „ „ gr. 0,1421 di Na_2SO_4
per $C_7H_5O_6N_3 + 2C_2H_5ONa$: calcolato %: N 11,57; Na 12,66;
trovato %: „ 11,32; „ 13,14.

Il sale è solubile in acqua e in anidride acetica, insolubile in alcool, etere, acetone, benzene. Non fonde, ma scaldato deflagra violentemente. Con gli acidi si comporta come il monoalcoolato.

C) *Preparazione del trialcoolato* (1 mol. TNT + $3C_2H_5ONa$). — A gr. 5 di trinitrotoluene sciolti in 50 cc. di acetone si aggiungono gr. 1,5 di sodio sciolti in 100 cc. di alcool etilico.

La temperatura iniziale del liquido di 17° C. sale a 25° C. Si forma subito una intensa colorazione rossa e un abbondante precipitato. Questo viene raccolto filtrando alla pompa e lavato prima con acetone, poi in apparecchio Soxhlet a lungo con etere assoluto, indi seccato su acido solforico fino a peso costante.

Gr. 0,1889 di sostanza dettero cc. 15,3 di N (t = 16°; H = 746,6)
„ 0,3281 „ „ gr. 0,1622 di Na_2SO_4
per $C_7H_5O_6N_3 + 3C_2H_5ONa$: calcolato %: N 9,74; Na 16;
trovato %: „ 9,40; „ 16.

Il sale così ottenuto è colorato in rosso-arancio, di tinta molto più chiara dei mono- e dialcoolato. Non fonde ma deflagra violentemente. È solubilissimo in acqua, insolubile in alcool, etere, benzene, acetone. Dalla soluzione acquosa, con acidi diluiti, si precipita una massa gelatinosa che, seccata, assume un aspetto legnoso, e che scaldata lentamente su lamina di platino deflagra violentemente. Il liquido filtrato contiene acido nitroso.

Trattando il trinitrotoluene con un eccesso di alcoolato si riottenne il sale precedente impuro, come dimostra l'analisi del prodotto ottenuto facendo agire su gr. 5 di trinitrotoluene sciolti in 50 cc. di acetone, gr. 2,5 (5 atomi) di sodio sciolti in 100 cc. di alcool etilico. Il precipitato, raccolto e lavato come nei precedenti casi, dette i seguenti risultati:

Gr. 0,2849 di sostanza dettero cc. 21,3 di N (t = 16°; H = 746,6)
„ 0,3403 „ „ gr. 0,1882 di Na_2SO_4;
trovato %: N 8,67; Na 17,91.

Azione dell'ammoniaca sul TNT.

Fu usata una soluzione acquosa di ammoniaca di D = 0,938.

A gr. 5 di TNT in soluzione di 50 cc. di acetone si aggiungono cc. 2,55 (una molecola) di ammoniaca. La temperatura del liquido sale di 2° C. Si ha subito una intensa colorazione rosso-scura, ma non si forma precipitato.

A gr. 5 di TNT, sciolti in 50 cc. di acetone, si aggiungono cc. 5,10 di ammoniaca (2 molecole). La temperatura sale di 5° C. Appare una colorazione rosso-scura come nel caso precedente; non si forma precipitato.

A gr. 5 di TNT in 50 cc. di acetone si aggiungono 7,65 cc. di ammoniaca (3 molecole). La temperatura sale di 7° C., ma anche in questo caso non si forma precipitato.

Lasciando evaporare il solvente, dopo un certo tempo si separano dei cristalli che, raccolti, dimostrano essere tritolo inalterato (p. f. 80°). Infatti, dalla loro soluzione in acido nitrico concentrato precipita per diluizione tritolo bianco, cristallino.

Separato per filtrazione il tritolo, i liquidi vengono acidificati con acido cloridrico diluito; precipita una massa gelatinosa di colore giallo-rossastro; saggiata sulla fiamma, si rammollisce malamente, e non presenta un vero punto di fusione.

Questi prodotti ottenuti per acidificazione si sciolgono alquanto nell'acqua calda; meglio nell'alcool.

Si è ripetuta la reazione $1\,TNT + 2\,NH_3$ con 10 gr. di tritolo sciolti in 25 cc. di acetone e 10,2 cc. di NH_3. Si è scaldato qualche tempo a bagno maria, indi si è acidificato con acido cloridrico al 10 %. L'abbondante precipitato rosso scuro separato si scioglie a caldo nell'acqua e nell'alcool.

Il liquido filtrato venne estratto con etere e poi con acqua; dall'estratto acquoso dopo qualche giorno si separarono pochi cristallini colorati in rosso chiaro, che fondevano incompletamente a 180°. Nella decomposizione verso i 200° si ha un residuo carbonioso.

Gr. 0,0926 di sostanza dettero cc. 17,1 di N ($t = 14°$, $H = 745$)
per $C_7H_5O_6N_3 + NH_4OH$: calcolato %: N 21,37;
trovato %: „ 21,53.

II. — Azione degli acidi sul composto TNT + 3 alcoolato sodico.

Si è già notato nella descrizione del mono-, bi- e trialcoolato che facendo agire sulla soluzione acquosa dei 3 sali gli acidi diluiti, si forma un precipitato gelatinoso di colore giallastro, e si ha sviluppo di acido nitroso.

Fummo spinti dapprima a studiare il prodotto che si ottiene per azione degli acidi diluiti sulla soluzione del trialcoolato, perchè tale composto apparve più facilmente ottenibile e purificabile.

Si deve notare fin d'ora che successive preparazioni di questo prodotto di reazione con gli acidi, han dato risultati analitici non sempre concordanti. Questo si deve attribuire alla difficoltà di purificare sostanze di natura colloidale e di liberarle dagli acidi da cui venivano precipitate; inoltre la sostanza secca è notevolmente igroscopica.

Gr. 20 di sale sciolti in 200 cc. di acqua furono trattati con acido cloridrico diluito (D = 1,050); si ottiene un abbondante precipitato gelatinoso di colore giallo sporco. Raccolto su filtro, lavato abbondantemente con acqua bollente, fu seccato all'aria; ha un aspetto legnoso e un colore giallo cannella.

Una parte di questo prodotto fu estratta con etere in Soxhlet per 10-12 ore; il basso tenore di azoto trovato fece supporre trattarsi di sostanza non sufficientemente pura:

I. Gr. 0,1895 di sostanza dettero cc. 16,4 di N ($t = 18°$, $H = 752$).
II. „ 0,1884 „ „ cc. 17 „ ($t = 16°$, $H = 748$).

Trovato %: N: I. 10,05; II. 10,49.

A conferma della nostra supposizione, serve la prova seguente: un po' di sostanza venne bruciata in crogiolino; le ceneri ottenute per calcinazione rivelarono la presenza di cloruri.

Venne allora sospesa la sostanza in acqua, trattata con acido cloridrico concentrato e dopo varie ore filtrata e lavata a fondo con acqua calda.

Gr. 0,2653 di sostanza dettero cc. 26,8 di N ($t = 19°,8$, $H = 774$).

Trovato %: N 11,53.

Pochi grammi della stessa sostanza vennero sciolti in alcool etilico a caldo: dalla soluzione alcoolica filtrata si separò una polvere che, raccolta su filtro e seccata, dette all'analisi i seguenti risultati:

Gr. 0,1692 di sostanza dettero cc. 17,85 di N ($t = 18°,5$, $H = 744$).

Trovato %: N 12,10.

Allo scopo di chiarire il comportamento del sale sodico verso i diversi acidi, e anche di dedurre in modo comparativo le quantità di acido trattenute dal precipitato, furono preparate tre porzioni del prodotto legnoso partendo da uguali quantità di sale sodico, e facendo reagire su di essi rispettivamente, e nelle stesse condizioni, gli acidi cloridrico, nitrico e solforico diluiti (10 %).

Si forma in tutti e tre il solito precipitato gelatinoso colorato in giallo sporco, e si nota sviluppo di acido nitroso.

I tre precipitati vennero raccolti separatamente su filtro e lavati lungamente con acqua bollente, finchè nelle acque di lavaggio non erano più sensibili le reazioni caratteristiche degli acidi adoperati. Prima di procedere all'analisi, vennero trattati con etere in estrattore Soxhlet:

A) Prodotto ottenuto con l'acido solforico:

Gr. 0,1737 di sostanza dettero gr. 0,2860 di CO_2 e gr. 0,0690 di H_2O
„ 0,2003 „ „ cc. 24 di N ($t = 18°,7$, $H = 753$).
Trovato %: C 44,91; H 4,45; N 13,91.

B) Prodotto ottenuto con l'acido nitrico:

Gr. 0,2950 di sostanza dettero cc. 37,7 di N ($t = 19°$, $H = 754$).
Trovato %: N 14,82.

C) Prodotto ottenuto con l'acido cloridrico:

Gr. 0,2177 di sostanza dettero cc. 24,5 di N ($t = 18°$, $H = 752$).
Trovato %: N 13,06.

Dalle analisi e dal comportamento si può ritenere che i tre prodotti siano da riferirsi ad uno stesso composto che trattiene sempre piccole quantità dell'acido di decomposizione.

Seguendo i suggerimenti che la pratica ci venne consigliando, fu ripreparato, allo scopo di sottoporlo all'analisi, il prodotto ottenuto per l'azione dell'acido cloridrico diluito sul sale sodico trialcoolato. Tale preparazione fu fatta filtrando la soluzione acquosa del sale, come pure l'acido diluito ($D = 1,050$), lavando a fondo il precipitato con acqua bollente, e lavando il

prodotto secco con etere assoluto in estrattore Soxhlet per varie ore. Il prodotto fu tenuto a lungo nel vuoto su acido solforico.

I. Gr. 0,1833 di sost. dettero gr. 0,3005 di CO_2 e gr. 0,0696 di H_2O
II. „ 0,2118 „ „ gr. 0,3502 „ gr. 0,0794 „

	I	II		I	II
Trovato %:	C 44,71	45,09;		H 4,25	4,19.

Caratteristiche e reazioni del prodotto ottenuto dal trialcoolato cogli acidi minerali. — Allo stato secco si presenta di aspetto legnoso, di colore giallo sporco: polverizzato ha l'aspetto del sughero. Scaldato su piccola fiamma esplode violentemente senza accennare a fusione, e lasciando un abbondante residuo carbonioso. Si scioglie alquanto in acetone, meno in alcool e in acido acetico glaciale.

I saggi fatti sono qui appresso riassunti:

1) Una porzione di questo prodotto legnoso è trattata con acido nitrico fumante: si ha una reazione molto energica che può degenerare in deflagrazione. Aggiunta all'acido a piccole dosi si scioglie completamente con colorazione rosso-bruna. Diluendo con acqua questa soluzione si ottiene un precipitato gelatinoso che viene raccolto su filtro e lavato con acqua calda: il prodotto secco ha l'aspetto resinoso (si elettrizza facilmente per strofinìo).

Gr. 0,1989 di sostanza dettero cc. 21,7 di N ($t = 21°$, $H = 729$).

Trovato %: N 12,13.

2) Riscaldato con isocianato di fenile non si nota apparentemente nessuna reazione.

3) Riscaldato con soluzione al 10 % di joduro di potassio si nota uno sviluppo gassoso; agitando con cloroformio, questo si colora in violetto.

4) Il prodotto non reagisce a caldo nè col cloruro di acetile nè col cloruro di benzoile.

5) Si scioglie in acido solforico concentrato colorandolo in giallo bruno.

6) Alla soluzione alcoolica del prodotto legnoso si aggiungono pochi cc. di potassa alcoolica: si ottiene un precipitato rosso scuro, solubile in acqua, che per azione degli acidi diluiti ripristina il prodotto legnoso.

III. — **Azione degli alchilsolfati sul composto TNT — trialcoolato.**

Aggiungendo al solfato dimetilico a poco a poco del sale sodico TNT + 3 alcoolato, si ha una violenta reazione con forte sviluppo di calore. Finita la reazione, diluendo con acqua, precipita una sostanza scura, sempre di aspetto legnoso.

Parve quindi conveniente di far reagire il solfato dimetilico sul sale in soluzione acquosa: si trattarono gr. 5 di sale sciolti in 25 cc. di acqua con 5 cc. di solfato dimetilico. Come prodotto della reazione si ebbe una sostanza non cristallina, che allo stato secco è colorata in giallo cannella e ha l'aspetto polverulento: riscaldata su lamina di platino a piccola fiamma non fonde, ma deflagra con violenza. Non è solubile in acqua, nè in etere, nè in benzolo; è solubile in alcool, a caldo, in acetone, in anidride acetica ed in acido acetico glaciale.

Una soluzione in alcool dà con joduro potassico e cloroformio la colorazione violetta, come il prodotto ottenuto per azione degli acidi sul sale rosso. La sostanza viene purificata riprecipitandola dalla soluzione alcoolica con acqua e seccandola su acido solforico. Si scioglie nell'acido solforico concentrato colorandolo, come gli altri prodotti, in giallo marrone.

Si scioglie nell'idrossido di potassio con colorazione giallastra. Gli acidi diluiti riprecipitano da questa soluzione il prodotto in forma colloidale.

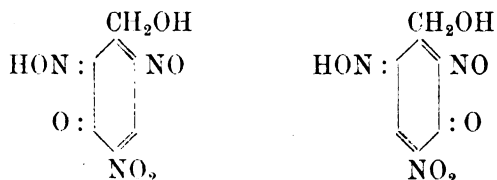
I. Gr. 0,1917 di sost. dettero gr. 0,2742 di CO_2 e gr. 0,0758 di H_2O.
II. „ 0,1782 „ „ gr. 0,2509 „ gr. 0,0701 „
Gr. 0,2747 „ „ cc. 27,6 di N ($t = 14°$, $H = 745$).

		I	II		I	II	
Trovato %:	C	38,81	38,40;	H	4,40	4,40	N 11,71.

Anche il solfato di etile, come il solfato di metile, reagisce con la soluzione del sale rosso dando luogo ad un prodotto di colore giallo sporco, che non fonde, ma deflagra per riscaldamento.

CONCLUSIONE

In base ai dati sperimentali esposti in questa Nota si possono trarre alcune considerazioni sulla natura dei prodotti salini che prendono origine per azione degli alcali sull'α-trinitrotoluene. In un primo momento gli alcali si addizionano al trinitrotoluene formando prodotti, che in alcuni casi, come per es. per molte basi organiche, si possono isolare; in altri casi invece prendono successivamente origine prodotti di condensazione e, probabilmente, di trasposizione molecolare. A questo riguardo, crediamo interessante ricordare lo studio recente di G. Schultz e K. L. Sanguly (1) sull'azione chimica della luce sul tritolo, dal quale studio risulta in modo evidente la trasformazione del tritolo nei due composti seguenti:

```
          CH₂OH                      CH₂OH
         /  \\                      /  \\
HON :   |     NO           HON :   |    | NO
        |     |                    |    |
O :     |     |                    |    | : O
         \\  //                      \\  /
          NO₂                        NO₂
```

Anche per azione degli alcali prendono origine prodotti di trasposizione, unitamente ad una condensazione, con probabile formazione di derivati del dibenzile, in accordo coi risultati di W. Will, già accennati, ed ammessi già dallo stesso Hantzsch. Il fatto che nella decomposizione con gli acidi dei prodotti salini ottenuti per azione degli alcali sul tritolo si ottengono quantità diverse di azoto, indica che nella reazione avviene una eliminazione graduale del gruppo nitrico. Si può, ad es., ammettere che possa prendere origine la serie dei composti indicati nella tabella seguente:

(1) " Ber. chem. Gesell. „, 58, 702 (1925).

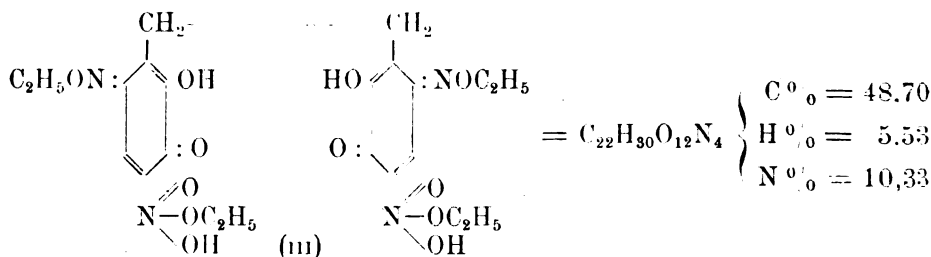
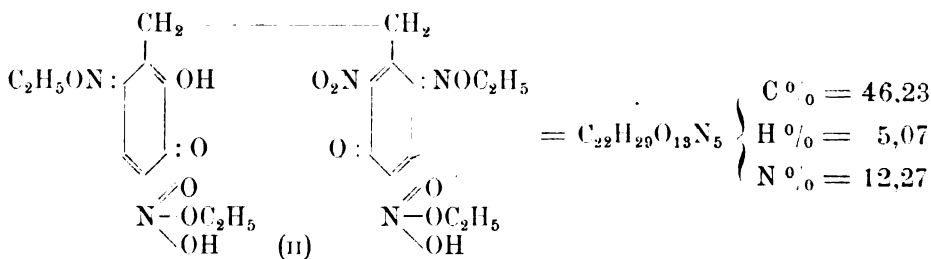
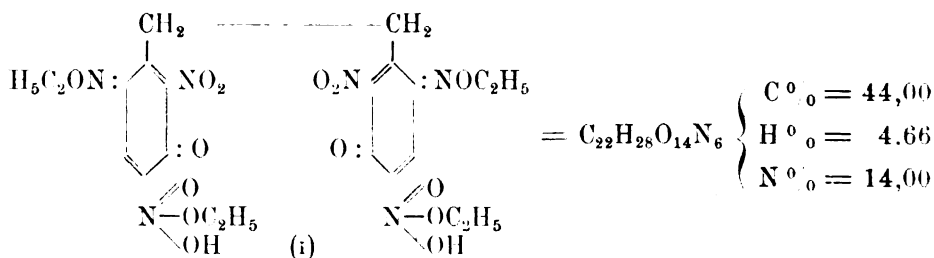
```
              CH2 ------------------- CH2
               |                       |
H5C2ON :  / \  NO2          O2N  // \  : NOC2H5
         |   |                  |   |
         |   | : O          O : |   |
          \ /                    \ /
          //O                    //O
         N—OC2H5                N—OC2H5
          \OH        (I)         \OH
```

$$= C_{22}H_{28}O_{14}N_6 \left\{ \begin{array}{l} C\,\% = 44{,}00 \\ H\,\% = \ \ 4.66 \\ N\,\% = 14{,}00 \end{array} \right.$$

```
              CH2 ------------------- CH2
               |                       |
C2H5ON :  / \  OH           O2N  // \  : NOC2H5
         |   |                  |   |
         |   | : O          O : |   |
          \ /                    \ /
          //O                    //O
         N—OC2H5                N—OC2H5
          \OH        (II)        \OH
```

$$= C_{22}H_{29}O_{13}N_5 \left\{ \begin{array}{l} C\,\% = 46.23 \\ H\,\% = \ \ 5{,}07 \\ N\,\% = 12{,}27 \end{array} \right.$$

```
              CH2 ------------------- CH2
               |                       |
C2H5ON :  / \  OH           HO  // \  : NOC2H5
         |   |                  |   |
         |   | : O          O : |   |
          \ /                    \ /
          //O                    //O
         N—OC2H5                N—OC2H5
          \OH        (III)       \OH
```

$$= C_{22}H_{30}O_{12}N_4 \left\{ \begin{array}{l} C\,\% = 48.70 \\ H\,\% = \ \ 5.53 \\ N\,\% = 10{,}33 \end{array} \right.$$

I dati analitici riguardanti il prodotto ottenuto per azione degli acidi diluiti sul sale TNT + 3 etilato sodico, indicano che nella detta reazione si forma un prodotto non completamente puro, e probabilmente un miscuglio di composti.

Queste ricerche verranno continuate.

Torino – Laboratorio di Chimica organica
della R. Scuola d'Ingegneria.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 6 Marzo 1927

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Guidi, Grassi, Somigliana, Ponzio, Pochettino, Garelli, Repossi e il Segretario Mattirolo.

Scusano la loro assenza i Soci: Parona, Panetti, Sacco, Boggio.

Il Segretario legge il verbale della precedente adunanza, che risulta approvato senza osservazioni.

L'adunanza è dichiarata aperta alle ore 11 $^1/_2$.

Il Presidente, dopo la lettura degli articoli dello Statuto, relativi alla nomina dei Soci residenti, constatato che i procedimenti ivi indicati sono stati regolarmente seguìti, dopo avere con parole di caloroso elogio e di ammirazione dovuta, rievocate le luminose benemerenze scientifiche di S. A. R. il Duca degli Abruzzi, pone in votazione, colle modalità regolamentari, la nomina di S. A. R. a Socio nazionale residente.

La votazione avvenuta ad unanimità di voti è vivamente applaudita dai Soci, i quali dànno incarico al Presidente di

partecipare il risultato della imponente votazione a S. A. R. IL DUCA DEGLI ABRUZZI, avvertendolo che la nomina dovrà essere partecipata a S. M. per la sovrana approvazione.

L'adunanza è quindi dichiarata chiusa alle ore 12.

Adunanza del 20 Marzo 1927

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. C. F. PARONA
VICEPRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'OVIDIO, PEANO, GUIDI, GRASSI, PANETTI, SACCO, POCHETTINO, BOGGIO, REPOSSI e il Segretario MATTIROLO.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che risulta approvato senza osservazioni.

Scusano la loro assenza il Presidente Senatore RUFFINI che per dovere di Presidente deve trovarsi a Genova per la definizione del legato Ravani, e il Socio Direttore di Classe SOMIGLIANA che ha dovuto recarsi a Milano per rappresentare l'Università alla inaugurazione del Monumento a S. S. Pio XI, già bibliotecario dell'Ambrosiana.

I Soci Vice Presidente PARONA, BOGGIO e PANETTI che per varii impedimenti non hanno potuto prender parte all'adunanza del 6 corr., dichiarano che avrebbero, ove fossero stati presenti, con entusiasmo aderito alla proposta di nomina a Socio residente di S. A. R. il Duca degli Abruzzi.

Il Presidente dà quindi lettura della lettera di S. A. R. colla quale ringrazia l'Accademia per la nomina a Socio residente, lettera che è accolta da vivi applausi.

Il Socio Peano presenta come omaggio all'Accademia un volumetto della Signora E. Sylvia Pankhurst dal titolo: *Delphos. The future of International Language*, e ne discorre facendo rilevare l'importanza dell'argomento trattato, colla esposizione della storia del problema e la critica scientifica delle varie soluzioni proposte.

Il Socio Segretario presenta all'adunanza il volume V del *Trattato di Anatomia Patologica* pubblicato dal nostro compianto Socio Pio Foà. Questo volume del quale è autore il prof. Aldo Perroncito tratta della *Rigenerazione e dei trapianti dei tessuti*, argomento del più alto interesse scientifico, e particolarmente sviscerato da autori italiani. Il volume elegantemente illustrato, con illustrazioni originali, fu inviato all'Accademia direttamente dalla solerte casa Editrice Unione Tipografica di Torino, che l'Accademia ringrazia.

Il Socio Segretario presenta quindi per la inserzione negli *Atti* nel nome del Socio Somigliana, assente per le ragioni sopra indicate, una Nota del Dr. Mario Bossolasco dal titolo: *Sulle medie aritmetiche delle funzioni di un Sistema ortogonale.*

Il Socio Boggio, nel nome del Dr. Filippo Oddone, presenta quindi elogiandola, una Nota dal titolo: *I numeri reali definiti mediante le grandezze e successioni di interi*, che risolve l'arduo argomento con modalità nuove di metodo per le quali l'autore risponde alle critiche sollevate da precedenti soluzioni.

LETTURE

Sulle medie aritmetiche delle funzioni di un sistema ortogonale.

Nota del Dr. MARIO BOSSOLASCO
presentata dal Socio nazionale residente Carlo Somigliana

In questa Nota stabilisco, per le funzioni di un qualunque sistema ortogonale-normale, alcune proprietà delle loro medie aritmetiche. La prima proposizione ottenuta pone in luce il carattere oscillatorio delle funzioni di tali sistemi, mentre quella di cui al § 2 si collega a questioni dell'analisi funzionale e precisamente al problema dell'estensione del concetto di valor medio. In ultimo dimostro come lo studio dettagliato del comportamento di tali medie sia collegato a quello delle cosidette " funzioni di Lebesgue „ e, mediante queste, al problema della rappresentazione di una funzione arbitraria in serie di funzioni ortogonali.

1. — Sia $[\varphi] \equiv \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_n(x), \dots$ un sistema ortogonale e normale di funzioni definite nell'intervallo (a, b), cioè tale che risulti:

$$(1) \qquad \begin{cases} \int_a^b \varphi_i(x)\, \varphi_k(x)\, dx = 0 \\ \int_a^b \varphi_i(x)^2\, dx = 1 \qquad\qquad (i \,.\, k = 1, 2, \dots;\ i \neq k). \end{cases}$$

Posto:

$$(2) \qquad L_n(x) \equiv \frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \dots + \varphi_n(x)}{n},$$

si verifica immediatamente che le funzioni $L_n(x)$ convergono in media allo zero nell'intervallo (a, b). Si ha invero:

$$\int_a^b L_n(x)^2\, dx = \int_a^b \frac{\varphi_1(x)^2 + \varphi_2(x)^2 + \dots + \varphi_n(x)^2}{n^2}\, dx = \frac{1}{n}.$$

Sorge allora il problema di cercare se esiste il limite delle medie aritmetiche $L_n(x)$ in un punto qualunque di (a, b). A tal riguardo dimostrerò che sussiste la seguente proprietà:

" *Le medie aritmetiche* $L_n(x)$, *definite dalle* (2), *relative ad un qualsiasi sistema ortonormale* [φ] *tendono a zero al crescere indefinitamente di* n, *quasi ovunque nell'intervallo di ortogonalità* " (1).

Posto, colle notazioni precedenti:

$$\alpha_n = \int_a^b |L_{n+1}^2(x) - L_n^2(x)|\, dx\,,$$

proverò dapprima che la serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ è convergente. Infatti, per la diseguaglianza di Schwarz e per le relazioni di ortonormalità (1), si ha successivamente:

$$\alpha_n = \int_a^b |(L_{n+1} - L_n)(L_{n-1} + L_n)|\, dx \leq$$

$$\leq \sqrt{\int_a^b (L_{n+1} - L_n)^2\, dx \int_a^b (L_{n+1} + L_n)^2\, dx} =$$

$$= \sqrt{\int_a^b \left[\frac{n\varphi_{n+1} - (\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots \varphi_n)}{n(n+1)}\right]^2 dx \int_a^b \left[\frac{n\varphi_{n+1} + (2n+1)(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots \varphi_n)}{n(n+1)}\right]^2 dx} =$$

$$= \frac{\sqrt{4n+1}}{n(n+1)} < \frac{2\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \frac{2}{n\sqrt{n+1}} < \frac{2}{n^{3/2}}\,.$$

Questo risultato permette di affermare che la serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x |L_{n+1}^2(x) - L_n^2(x)|\, dx$$

è convergente per qualunque x di (a, b); d'altra parte i termini di questa serie sono funzioni monotone: è quindi possibile, per un teorema del prof. Fubini (2), derivarla termine a termine quasi ovunque in (a, b), cosicchè risulta la convergenza di:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |L_{n+1}^2(x) - L_n^2(x)|\,,$$

---

(1) Per brevità, dirò sistema *ortonormale* invece di " ortogonale e normale ". Al solito, intenderò poi che la locuzione " quasi ovunque " equivalga alla seguente: " ovunque, a meno di un insieme di misura nulla ".

(2) " Rendiconti Acc. Lincei ", 1915, vol. XXIV₁, pag. 204.

colla stessa limitazione; *a fortiori* ciò accadrà altresì per la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{ L_{n+1}^2(x) - L_n^2(x) \},$$

dal che segue che le $|L_n(x)|$ tendono, per $n \to \infty$, ad un limite finito $L(x)$ per ogni x di (a, b), escluso al più un insieme di misura nulla. Ora tale funzione limite $L(x)$ non può essenzialmente essere diversa da zero; invero da:

$$\int_a^b |L_n(x)| dx \leq \sqrt{(b-a) \int_a^b L_n(x)^2 dx}$$

e dalla convergenza in media allo zero della $L_n(x)$ segue che:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |L_n(x)| dx = 0.$$

Ma per un risultato di F. Riesz ([3]) esiste l'integrale $\int_a^b |L(x)| dx$ e si ha:

$$\int_a^b |L(x)| dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b |L_n(x)| dx.$$

Dunque risulta $L(x) = \lim_{n \to \infty} L_n(x) = 0$ quasi ovunque in (a, b).

([3]) V. "Comptes Rendus", 1907, t. 144, pag. 615. La proposizione di F. Riesz afferma che: "*Se una successione di funzioni positive* $f_i(x)$ *definite nello stesso insieme misurabile* E, *integrabili col loro quadrato, convergono verso una funzione* $f(x)$ *in ogni punto dell'insieme* E *salvo al più un insieme di misura nulla e se si ha:* $\int_E [f_i(x)]^2 dx \leq M$ *per ciascuna funzione* $f_i(x)$, M *essendo un numero fisso, allora* f *è integrabile e si ha:*

$$\int_E f(x)\, dx = \lim_{i \to \infty} \int_E f_i(x)\, dx \text{ "}.$$

Nel caso presente basta porre $f_i(x) \equiv |L_i(x)|$, $E = (a, b)$ essendo $M=1$. Il teorema ora citato fu generalizzato da C. De La Vallée Poussin in "Transaction of the American Math. Society", vol. 16, 1915, pag. 452.

2. — In alcune questioni di analisi funzionale ([4]) si è condotti a considerare quei sistemi ortonormali che verificano alle relazioni seguenti:

$$
(3)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{n \succ \infty} F_n(x, y) = 0 & (x \neq y) \\ \lim\limits_{n \succ \infty} F_n(x) = 1 & (a < x < b,\ a < y < b) \end{cases}
$$

avendo posto:

$$
(4)\qquad \begin{cases} F_n(x, y) \equiv \frac{1}{n}\left[\varphi_1(x)\,\varphi_1(y) + \ldots + \varphi_n(x)\,\varphi_n(y)\right], \\ F_n(x) \equiv F_n(x, x). \end{cases}
$$

Quando accade semplicemente che le $F_n(x, y)$ convergono in media a zero nel quadrato $Q \equiv (a < x < b,\ a < y < b)$ e le $F_n(x)$ convergono in media all'unità nell'intervallo (a, b), cioè:

$$
(5)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{n \succ \infty} \int_a^b \int_a^b F_n^2(x, y)\, dx\, dy = 0\,, \\ \lim\limits_{n \succ \infty} \int_a^b \left[F_n(x) - 1\right]^2 dx = 0\,, \end{cases}
$$

il sig. P. Lévy dice che la successione $[\varphi]$ è *ugualmente densa* nell'intervallo (a, b). Ora, tale autore ha osservato che la prima relazione (5) è sempre soddisfatta da qualsiasi sistema ortonormale, completo o no, di guisa che l'unica condizione che caratterizza i sistemi egualmente densi è la convergenza in media all'unità delle funzioni $F_n(x)$. Si ha invero:

$$
\int_a^b \int_a^b \left[\frac{\varphi_1(x)\,\varphi_1(y) + \ldots + \varphi_n(x)\,\varphi_n(y)}{n}\right]^2 dx\, dy =
$$

$$
= \int_a^b \int_a^b \frac{\varphi_1^2(x)\,\varphi_1^2(y) + \ldots\, \varphi_n^2(x)\,\varphi_n^2(y)}{n^2}\, dx\, dy = \frac{1}{n}\,,
$$

da cui la convergenza in media allo zero delle $F_n(x, y)$.

([4]) V. Paul Lévy, *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Paris, 1922, pag. 293.

Ma vi ha di più: non solo la prima delle (5) è sempre soddisfatta da qualsiasi sistema ortonormale, ma anche la corrispondente prima formola delle (3) è da tali sistemi verificata quasi ovunque; in altri termini dimostrerò che:

" *Per ogni sistema ortonormale* $[\varphi]$ *le medie aritmetiche* $\mathrm{F}_n(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, *definite dalle* (4), *tendono a zero al crescere indefinitamente di* n, *quasi ovunque nel quadrato* $\mathrm{Q} \equiv (\mathrm{a} < \mathrm{x} < \mathrm{b},\ \mathrm{a} < \mathrm{y} < \mathrm{b})$, *cioè escluso al più un insieme superficiale di misura nulla* ".

La dimostrazione è simile a quella seguìta per provare la proposizione del § 1.

Posto:

$$a_n = \int_a^b \int_a^b | F_{n+1}^2(x, y) - F_n^2(x, y) | \, dx \, dy,$$

si ha ancora, utilizzando la diseguaglianza di Schwarz, che:

$$a_n \leq \sqrt{\int_a^b \int_a^b (F_{n+1} - F_n)^2 \, dx \, dy \, . \int_a^b \int_a^b (F_{n+1} + F_n)^2 \, dx \, dy} =$$

$$= \frac{\sqrt{[n(n+1)][n^2 + (2n+1)^2 n]}}{n^2 (n+1)^2} < \frac{\sqrt{2(2n+1)}}{n(n+1)} < \frac{2}{n^{3/2}}$$

da cui segue che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente; *a fortiori* sarà pure tale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x \int_a^b | F_{n+1}^2(x, y) - F_n^2(x, y) | \, dx \, dy$$

per qualunque x di (a, b); questa serie, per derivazione, permette di asserire che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b | F_{n+1}^2(x, y) - F_n^2(x, y) | \, dy$$

è convergente per ogni x, escluso al più un insieme I_x di misura nulla.

Risulta di qui che, con tale limitazione, la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^y | F_{n+1}^2(x, y) - F_n^2(x, y) | \, dy$$

è convergente per qualunque y, da cui derivando si ha infine che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} | F_{n+1}^2 (x, y) - F_n^2 (x, y) |,$$

e di conseguenza, anche:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{ F_{n+1}^2 (x, y) - F_n^2 (x, y) \}$$

è convergente, escluso al più per i valori di x e di y appartenenti rispettivamente agli insiemi di misura nulla I_x ed I_y.

Da questo risultato segue l'esistenza di un limite finito $F(x, y)$ per le $| F_n (x, y) |$, al tendere di n all'infinito, in tutti i punti (x, y) di Q, esclusi al più quelli di cui almeno una delle coordinate appartiene o ad I_x o ad I_y [5]. Ma questo limite $F(x, y)$ non può essere diverso da zero che in un insieme superficiale contenuto nel quadrato Q avente misura nulla, poichè il caso contrario sarebbe in contraddizione colla convergenza in media a zero delle $F_n (x, y)$. Dunque, a meno di un insieme superficiale di misura nulla, si ha in Q:

$$F(x, y) = \lim_{n \to \infty} F_n (x, y) = 0.$$

3. — Osservo che i risultati ottenuti nei §§ precedenti sono indipendenti dall'ordine delle funzioni φ_n che costituiscono il sistema ortogonale in questione.

P. Lévy ha osservato invece che la condizione:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b [F_n (x) - 1]^2 \, dx = 0,$$

caratteristica per i sistemi egualmente densi, è connessa coll'ordine, poichè, in generale, scambiando l'ordine un tale sistema può cessare di rimanere egualmente denso. Col risultato stabilito nel § 2 resta chiarito il fatto che per i sistemi egualmente

---

[5] Osservo che di qui resta implicitamente stabilita l'*esistenza, per ogni sistema ortonormale, del limite delle* $F_n(x) \equiv F_n(x, x)$, *per* $n \to \infty$ *quasi ovunque in* (a, b).

densi si possono avere dei segmenti contenuti nel quadrato Q, distinti dalla diagonale, che sono eccezionali per le funzioni $F_n(x, y)$, inquantochè il limite di queste al crescere di n è diverso da zero sui segmenti medesimi.

4. — Lo studio del modo con cui tende a zero la media aritmetica $L_n(x)$, definita dalla (2) del § 1 e relativa a sistemi ortonormali *completi*, è particolarmente interessante per la rappresentazione effettiva di una funzione arbitraria in serie delle funzioni del sistema ortonormale medesimo.

Conviene dapprima ricordare che allo studio di un sistema ortogonale sono collegate le cosidette *funzioni di Lebesgue*.

Conservate le notazioni di prima e posto:

$$S_n(x) \equiv \sum_1^n \varphi_i(x) \int_a^b f(y)\, \varphi_i(y)\, dy\,,$$

si chiama *funzione di Lebesgue di ordine n* del sistema $[\varphi]$, e si indica generalmente con $\rho_n(x)$, il limite superiore di $S_n(x)$ quando si fa variare la funzione $f(x)$ in (a, b) in guisa che risulti costantemente di modulo minore di uno, e di quadrato integrabile. Poichè risulta, in queste condizioni:

$$\int_a^b f(y) \sum_1^n \varphi_i(x)\, \varphi_i(y)\, dy \leq \int_a^b \left| \sum_1^n \varphi_i(x)\, \varphi_i(y) \right| dy\,,$$

segue:

$$\rho_n(x) = \int_a^b \left| \sum_1^n \varphi_i(x)\, \varphi_i(y) \right| dy\,.$$

Ricordo che per il sistema ortogonale delle funzioni trigonometriche le funzioni di Lebesgue si riducono a delle costanti, che crescono con n all'infinito ([6]).

Ciò premesso è facile provare che:

" *Se le funzioni di Lebesgue del sistema* $[\varphi]$, *ortogonale e completo in* (a, b), *sono equilimitate, ogni funzione* f(x) *che si possa approssimare in* (a, b) *con combinazioni lineari a coefficienti co-*

([6]) Osservo che le costanti di Lebesgue delle serie trig. di Fourier sono le analoghe delle costanti di Landau che si presentano nelle serie di potenze.

stanti delle funzioni φ_i (7), *può essere rappresentata in serie generalizzata di Fourier delle* φ_i ».

Sia $f(x)$ una funzione di quadrato integrabile tale che si abbia con opportune costanti α_i:

$$(6) \qquad |f(x) - \sum_1^n \alpha_i \varphi_i(x)| < \epsilon_n ,$$

dove $\lim_{n \succ \infty} \epsilon_n = 0$. Considero contemporaneamente la serie delle φ_i i cui coefficienti sono quelli di Fourier relativi alla stessa funzione $f(x)$:

$$a_i = \int_a^b f(y) \varphi_i(y)\, dy ;$$

sarà allora:

$$|\sum_1^n a_i \varphi_i(x) - \sum_1^n \alpha_i \varphi_i(x)| = |\int_a^b \sum_1^n \varphi_i(x) \varphi_i(y) [f(y) - \sum_1^n \alpha_i \varphi_i(y)]\, dy| \leq$$
$$\leq \int_a^b |\sum_1^n \varphi_i(x) \varphi_i(y)| \cdot | f(y) - \sum_1^n \alpha_i \varphi_i(y)|\, dy \leq \epsilon_n \rho_n(x),$$

che unita alla (6) fornisce:

$$| f(x) - \sum_1^n a_i \varphi_i(x)| < \epsilon_n [\rho_n(x) + 1] ;$$

e dal fatto che ϵ_n tende a zero con $\frac{1}{n}$, mentre le ρ_n restano, qualunque siano n ed x, minori di un numero fissato, segue senz'altro:

$$f(x) = \sum_1^\infty a_i \varphi_i(x).$$

Da quanto si è ora stabilito risulta utile conoscere dei criteri per decidere se le funzioni di Lebesgue di un dato sistema ortogonale completo sono equilimitate. Ora, nel § 1, si è visto che è quasi ovunque in (a, b):

$$\lim_{n \succ \infty} \frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x)}{n} = 0 ;$$

(7) Per il che è necessaria la completezza di [φ].

ne segue che, fissato un numero positivo ϵ, piccolo a piacere, si può determinare un n_0 tale che, quasi ovunque in (a, b) risulti, per $n > n_0$:

$$(7) \qquad |\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x)| < n\epsilon.$$

Ciò premesso, sia $[\varphi]$ un sistema ortonormale *limitato*, cioè tale che si abbia, oltre alle (1):

$$|\varphi_i(x)| < M; \qquad (a < x < b), \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

essendo M un numero finito: per le funzioni di Lebesgue relative a questo sistema si può allora scrivere:

$$\rho_n(x) = \int_a^b \left|\sum_1^n \varphi_i(x)\varphi_i(y)\right| dy < M \int_a^b \left|\sum_1^n \varphi_i(y)\right| dy$$

e per la (7):

$$\rho_n(x) < Mn\epsilon(b - a).$$

Questa relazione permette di concludere che:

" *Se la media aritmetica* $L_n(x)$ *tende a zero, quasi ovunque in* (a, b), *con ordine eguale o minore di* $\frac{1}{n}$, *cioè si ha, colle notazioni di Landau:*

$$L_n(x) = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \textit{ovvero} \qquad L_n(x) = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

allora le funzioni di Lebesgue del sistema ortonormale limitato $[\varphi]$ *sono quasi sempre equilimitate* ".

I numeri reali definiti mediante le grandezze e successioni di interi.

Nota di FILIPPO ODONE
presentata dal Socio nazionale residente T. Boggio

Si sia ottenuta, non importa in qual modo, la classe Q_0 dei numeri reali assoluti, insieme alle classi parziali N_0, R_0 degli interi e dei razionali. Sotto tale ipotesi, ed essendo

$$f_0,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ \ldots$$

una *successione*, anche illimitata, tale che f_0 è un N_0 e $f_1, f_2, f_3, \ldots$ sono cifre (N_0 tra 0 e 9, estremi compresi), si può considerare il numero decimale

(a) $f_0, f_1 f_2 f_3 \ldots$ (come ad es. 3,1415926 ...),

che si può *definire* come *limite superiore* della classe di razionali decimali

(b) $f_0;\quad f_0, f_1;\quad f_0, f_1 f_2;\quad f_0, f_1 f_2 f_3; \ldots$

od anche come limite (generale) per n tendente ad ∞ del razionale decimale

(c) $f_0, f_1 f_2 \ldots f_n$.

Ne risulta che (a) è un determinato elemento x di Q_0 (un N_0, o un R_0, o un irrazionale, a seconda della successione $f_1, f_2, f_3 \ldots$).

Viceversa: un qualsiasi elemento x di Q_0 può porsi, in uno o più modi, sotto la forma (a).

Il razionale decimale (c) è il valore di (a), elemento di Q_0, con n cifre decimali esatte, cioè il numero (a) è eguale o maggiore di (c) e sempre minore di (c) aumentato di $1/10^n$.

Nei calcoli numerici, specialmente con gli irrazionali, è appunto dei numeri (c) che si fa uso. È quindi naturale, e didatticamente importante, cercare di ottenere i numeri reali come limiti superiori di classi della specie (b).

Si è più volte tentato [1] un simile procedimento, supposto nota soltanto la classe R_0 (e la N_0 in essa contenuta), ed è appunto a causa del campo iniziale R_0 troppo ristretto che le definizioni date risultano *apparenti*, perchè finiscono, in sostanza, per avere la forma largamente usata negli antichi trattati, e anche in parecchi moderni, " *non esistendo un ente tale che ... allora noi consideriamo l'ente ...* " [2].

È già stato osservato [3] che i Q_0 si possono ottenere dalle grandezze, campo più vasto degli R_0, e che risulta poi contenere anche i Q_0.

Mi valgo appunto, in questa Nota, delle grandezze per ottenere i Q_0 sotto le forme (a), (b), (c), facendo uso, oltre che delle grandezze, anche degli N_0, che da esse si deducono [4], definendo così, ad un tempo, gli R_0 e i Q_0 generici.

La breve esposizione che segue ha forma e carattere scientifico, ma, con opportuno sviluppo, è suscettibile di essere ri-

---

(1) Ad es. negli articoli di:

C. Soschino, *I numeri reali considerati come successioni di numeri decimali*, " Periodico di Matematica ", anno XXVI;

C. Mineo, *Sul concetto di numero reale e su una teoria elementare di questi numeri*, " Periodico di Matematica ", anno XXX;

e nei libri di testo:

G. Frattini, *Lezioni di algebra, geometria e trigonometria ad uso degli istituti tecnici*, Paravia;

F. Enriques e U. Amaldi, *Elementi di geometria ad uso delle scuole secondarie superiori*, Zanichelli.

(2) Classica questa: non esiste un numero reale il cui quadrato è -1; e allora noi indicheremo con $\sqrt{-1}$ il numero il cui quadrato è -1!!

(3) C. Burali-Forti, *L. M.* (*Logica Matematica*), pag. 388 e segg., in particolare per ulteriori modificazioni, *Sui numeri reali e le grandezze*, " Lincei ", 1921.

(4) C. Burali-Forti, *L. M.*, pag. 399 e segg.

dotta immediatamente a forma elementare adatta ad una scuola media [5].

1. — Sia u una classe di **grandezze** omogenea rispetto alla operazione $+$ (somma) [6]; a, b elementi di u con $a \neq 0$.

Chiameremo " *quoziente di b rispetto ad a* ", brevemente quot $(b; a)$: *quell'elemento x di N_0 tale che $b \geqq xa$ e $b < (x+1)a$.*

Risulta in modo ovvio (principio di Archimede) che: quot $(b; a)$ è un N_0 univocamente determinato.

Ciò posto, diremo " *successione individuata da b ed a* ", brevemente Suc $(b; a)$, la successione, anche illimitata,

$$(1) \qquad f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots$$

che risulta *definita* così:

$$(2) \quad \begin{cases} f_0 = \text{quot}\,(b; a) \\ f_n = \text{quot}\,(10^n b; a) - \text{quot}\,(10^{n-1} b; a) \quad \text{per } n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

È chiaro che: *la* Suc $(b; a)$, *cioè la* (1) *definita dalle condizioni* (2), *è univocamente determinata*; f_0 *è un* N_0 *qualunque*; f_n, *per n intero maggiore di zero, è sempre una cifra.*

Risulta pure che: se h è un N_0, allora per la Suc $(ha; a)$ si ha $f_0 = h$ e $f_n = 0$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$

La Suc $(b; a)$ si dirà *limitata*, quando esiste un n tale che per l'intero $r > n$ si ha sempre $f_r = 0$; *illimitata*, quando comunque grande si fissi n esiste un $r > n$ tale che $f_r \neq 0$.

Ci sarà utile per il seguito considerare gli N_0 *definiti* da:

$$(3) \qquad F_n = \sum_0^n{}_r\, 10^{n-r} f_r = 10^n f_0 + 10^{n-1} f_1 + \ldots + f_n;$$

quindi F_n è l'N_0, in cifre, che si ottiene scrivendo alla destra di f_0, scritto in cifre, ordinatamente le cifre $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

---

[5] In una scuola media è didatticamente conveniente supporre noti, oltre che gli N_0, anche gli R_0; la trattazione che segue diventa allora di una semplicità estrema.

[6] C. Burali-Forti, *L. M.*, pag. 377 e segg.; oppure S. Catania, *Grandezze e numeri*, pag. 7 e segg.

Se dalle (2) si calcolano $10^{n-r} f_r$ e si sommano, si ottiene, come del resto è evidente,

$$(4) \qquad F_n = \text{quot}\,(10^n\, b\,;\, a).$$

2. — Esporremo in questo numero alcune proprietà di fondamentale importanza per la dimostrazione dei teoremi che verremo enunciando.

Per u, a, b, F_n continui a valere quanto è stato detto nel numero 1.

Dalla (14), per la definizione di quot, risulta subito

$$(5) \qquad (F_n + 1)\, a > 10^n\, b \geqq F_n\, a \quad (^7).$$

Per ogni n, sono determinate le grandezze λ_n, ϵ_n *definite* ponendo

$$(6) \qquad 10^n\, \lambda_n = F_n\, a\,, \qquad 10^n\, \epsilon_n = a.$$

Sostituendo nella (5) si ha

$$(7) \qquad \lambda_n + \epsilon_n > b \geqq \lambda_n\,.$$

Dalla 2ª posizione (6) risulta che: col crescere di n, ϵ_n diminuisce; anzi, fissata una grandezza c (piccola a piacere), si può sempre determinare n in modo che $10^n c > a$ (principio di Archimede) e quindi $\epsilon_n < c$ (8).

Da ciò risulta che col crescere di n la differenza ϵ_n tra i membri estremi della (7) può rendersi minore di una qualunque grandezza (piccola a piacere) assegnata; e quindi

$$(8) \qquad b = \text{“ limite superiore delle } \lambda_n \text{ ”},$$

perchè $b \geqq$ di una qualunque delle grandezze λ_n ed inoltre $b - \lambda_n$ si può rendere minore di una qualunque grandezza (piccola a piacere) assegnata.

---

(7) Il segno = si presenta quando la Suc $(b;\, a)$ è limitata all'indice n.

(8) In seguito esprimeremo questa proprietà di ϵ_n (e di grandezze analoghe) dicendo brevemente: “ ϵ_n tende a 0 col tendere di n ad ∞ ”; il che introduce solo *apparentemente* il concetto di limite.

Oltre alle grandezze λ_n, ϵ_n incontreremo altre grandezze che indicheremo con μ_n, θ_n e che defineremo nel modo che segue.

Dalla (5) si ha:

$$10^n b + a \geqq (F_n + 1) a > 10^n b. \tag{9}$$

Per ogni n sono determinate le grandezze μ_n, θ_n *definite* ponendo

$$(F_n + 1) \mu_n = 10^n b ; \qquad (F_n + 1) \theta_n = a. \tag{1}$$

Sostituendo nella (9) si ha

$$\mu_n + \theta_n \geq a > \mu_n . \tag{11}$$

Ma θ_n, col tendere di n ad ∞ tende a zero ([9]); e ripetendo le considerazioni già fatte a proposito della (7), si conclude che

$$a = \text{" limite superiore delle } \mu_n \text{ ".} \tag{12}$$

3. — I risultati del n. 2 ci permettono di dimostrare il seguente teorema:

Non è possibile che la Suc $(b; a)$ *sia illimitata e che le* f_r *seguenti una certa* f_n *siano tutte eguali a* 9.

Infatti: ricerchiamo le conseguenze dell'ipotesi che la Suc $(b; a)$ definita dalle (2) sia *illimitata*, con $f_n < 9$ e tutte le f seguenti $(f_{n+1}, f_{n+2}, ...)$ eguali a 9. In tale supposizione si ha subito

$$F_{n+r} = 10^r F_n + 10^r - 1 = 10^r [10^n f_0 + 10^{n-1} f_1 + ... + (f_n + 1)] - 1;$$

e quindi dalle (6) si ricava

$$10^n \lambda_{n+r} = [10^n f_0 + 10^{n-1} f_1 + ... + (f_n + 1)] a - 10^n \epsilon_{n+r} .$$

Ma col tendere di r ad ∞, ϵ_{n+r} tende a zero e quindi per la (8)

$$10^n b = [10^n f_0 + 10^{n-1} f_1 + ... + (f_n + 1)] a ;$$

([9]) Cfr. nota ([8]).

vale a dire, per la definizione di Suc $(b; a)$, risulta che la Suc $(b; a)$ è limitata e formata dagli elementi $f_0, f_1, \ldots, f_n + 1$, il che è contrario all'ipotesi che Suc (b, a) sia illimitata. È dunque assurdo supporre che la Suc $(b; a)$ possa essere illimitata e che le f_r seguenti una certa f_n siano tutte eguali a 9.

4. — In base al teorema del n. 3 si può enunciare quest'altro teorema, molto importante:

Data una successione $f_0, f_1, f_2, \ldots$, *ove* f_0 *è un* N_0 *e le* f_n *sono cifre* (*per* $n = 1, 2, \ldots$), *limitata od illimitata, e se è illimitata tale che le* f *non siano tutte cifre* 9 *a partire da una di esse, allora: data una grandezza* a *non nulla* (*ovvero una grandezza* b *non nulla*) *esiste una ed una sola grandezza* b (*ovvero una ed una sola grandezza* a *non nulla*) *tale che la* Suc $(b; a)$ *è la successione data.*

Infatti: se la successione delle f è *limitata*, ad es. ad f_n, allora dalla (4) si ha $10^n b = F_n a$; e quindi data a (o b) è determinata b (od a).

La successione delle f sia *illimitata* e le f a partire da una di esse non siano tutte cifre 9.

a) Da (8) si ha che: $b = \text{l}'\lambda$, indicando con λ la classe formata dalle λ_n; è così dimostrato che data a è determinata b.

b) Da (12) si ha che: $a = \text{l}'\mu$, indicando con μ la classe formata dalle μ_n; è così dimostrato che data b è determinata a [10].

5. — Valgano sempre per u, a, b le ipotesi del n. 1.

Chiameremo: *rapporto tra* b *ed* a, e lo indicheremo con b/a, ovvero con $\frac{b}{a}$, *quell'operatore a sinistra tra gli* u *e gli* u, Ops $(u; u)$, *e* k *tale che qualunque sia l'elemento* x *non nullo di* u *si abbia sempre*

$$\text{Suc}\,(kx; x) = \text{Suc}\,(b; a).$$

---

[10] Notiamo che se le f_r con $r > n$ fossero tutte cifre 9, la grandezza b, limite superiore delle λ_n (ovvero la grandezza a, limite superiore delle μ_n), sarebbe quella definita da $10^n b = (F_n + 1) a$ (ovvero da $(F_n + 1) a = 10^n b$); e così la Suc $(b; a)$ sarebbe limitata, mentre la successione data è illimitata, quindi non sarebbe più vero il teorema.

Risulta che:

b/a *è* Ops (u; u) *univocamente determinato.*

Infatti: qualunque sia l'x non nullo di u è determinato in modo unico (n. 4) l'y di u in modo che $\mathrm{Suc}(y; x) = \mathrm{Suc}(b; a)$, e quindi y è una *determinata* funzione di x.

È poi evidente che:

Se a, b, c, d sono elementi di u con $a \neq 0$ e $c \neq 0$, allora $b/a = d/c$ solamente quando $\mathrm{Suc}(b; a) = \mathrm{Suc}(d; c)$.

Inoltre:

Se m è un N_1 qualunque, allora $\frac{b}{a}(ma) = mb$; in particolare $\frac{b}{a} a = b$.

Infatti: essendo $\mathrm{quot}(10^n mb; ma) = \mathrm{quot}(10^n b; a)$ risulta $\mathrm{Suc}(mb; ma) = \mathrm{Suc}(b; a)$, cioè per il teorema precedente $mb/(ma) = b/a$.

Sussiste anche il teorema:

Se $a' \neq 0$, è determinato x in modo unico tale che $b/a = x/a'$; e se $b \neq 0$, allora dato $b' \neq 0$ è determinato x in modo unico tale che $b/a = b'/x$.

In altri termini: *il rapporto b/a si può sempre trasformare, e in un sol modo, in un rapporto ad esso eguale, avente un denominatore a' non nullo assegnato ad arbitrio; oppure, se $b \neq 0$, il rapporto b/a si può sempre trasformare, e in un sol modo, in un rapporto ad esso eguale, avente un numeratore b' non nullo assegnato ad arbitrio.*

Infatti: esiste un solo x tale che $\mathrm{Suc}(b; a) = \mathrm{Suc}(x; a') = \mathrm{Suc}(b'; x)$.

6. — *Chiameremo Q_0 (numero reale assoluto)* la classe formata dai rapporti b/a, ove b varia comunque in u e a varia pure comunque (indipendentemente da b) negli u non nulli. In altri termini: dire che k è un Q_0 equivale a dire che esistono almeno due elementi a, b di u, con a non nullo, tali che $k = b/a$.

Risulta dal n. 5 che: *Q_0 è classe univocamente determinata e che la classe N_0 è contenuta nella classe Q_0* [11].

[11] È da notare che la classe Q_0 così definita *dipende* da u e dovrebbe indicarsi, ad esempio, con $Q_{0,u}$. Ma col procedimento indicato dal professore

Il Q_0 nullo è unico ed è dato da $0/a$, per a arbitrario non nullo. Si noti anche che $b/a = \alpha$ equivale a $b = \alpha a$, $\alpha a/a = \alpha$, ed inoltre che da $\alpha a = 0$ segue $\alpha = 0$ ovvero $a = 0$.

7. — Sono notevoli le proprietà seguenti:

Se α *è un numero reale non nullo,* a, b *degli* u, *con* $a \neq 0$, *allora*

$$\alpha b/(\alpha a) = b/a. \tag{13}$$

Infatti: il teorema è evidente se $b = 0$. Sia $b \neq 0$.

a) Se a è un N_1, il teorema è già noto.

b) Se α è determinato dalla successione $f_0, f_1, f_2, \ldots$ allora esistono le grandezze η_n, ζ_n tali che

$10^n \alpha b = F_n b + F_n \eta_n$, con $F_n \eta_n < b$ ed η_n o nulla o tendente a zero;

$10^n \alpha a = F_n a + F_n \zeta_n$, con $F_n \zeta_n < a$ e ζ_n o nulla o tendente a zero [12].

Dividendo si ha (cfr. *a)*)

$\frac{\alpha b}{\alpha a} = \frac{b + \eta_n}{a + \zeta_n}$, c. d. d., poichè η_n, ζ_n o sono nulle o tendono a zero.

Se α, β sono numeri reali, indicheremo con $\alpha\beta$ semplicemente il prodotto funzionale, che riterremo già noto [13], di β per α: esso coincide con l'ordinario prodotto algebrico dei Q_0.

Per tale prodotto vale la *proprietà commutativa*; cioè:

Se α, β *sono* Q_0 *si ha*

$$\alpha\beta = \beta\alpha. \tag{14}$$

Infatti: il teorema è evidente quando α ovvero β è nullo.

Burali-Forti nella seconda Nota dell'Accademia dei Lincei, 1921, *Sui numeri reali e le grandezze*, dalla classe relativa $Q_{0,u}$ si può ottenere la classe Q_0 assoluta, il che noi intendiamo fatto. Tale questione, importante scientificamente, è di secondaria importanza nella parte didattica.

(12) Cfr. nota (8).

(13) C. Burali-Forti, *L. M.*, pag. 196; ovvero S. Catania, *Grandezze e numeri*, pagg. 4 e 16.

Supponiamo α, β non nulli.

a) Da $b/a = d/c$ segue $b/d = a/c$.

Infatti: posto $\alpha = b/a = d/c$ si ha $b = \alpha a$, $d = \alpha c$ e quindi, per la (13), $b/d = \alpha a/(\alpha c) = a/c$.

b) Posto $\alpha = b/a$, $\beta = a/c$ si ha $\beta c = a$, $\alpha\beta c = b$ e quindi $\alpha\beta = b/c$.

Posto invece $\alpha = b/a$, $\beta = x/b$ si ha in modo analogo $\beta\alpha = x/a$.

Per le due posizioni di β si ha $x/b = a/c$, ossia, per *a)*, $x/a = b/c$, cioè $\beta\alpha = \alpha\beta$, c. d. d.

Vale il teorema seguente:

Se α è un numero reale non nullo, esiste il suo inverso α^{-1}; *ossia la classe* Q *è una classe di operatori invertibili.*

Infatti: è determinato x in modo che $\alpha x = b$; e quindi è determinato α^{-1} tale che $x = \alpha^{-1} b$.

Questo teorema ci dà il modo di definire la classe R_0. Poichè la classe N_0 è contenuta nella Q_0, *chiameremo* R_0 (*numero razionale assoluto*) quella classe di Q_0 di cui ciascun elemento è il prodotto d'un N_0 per l'inverso d'un N_0 non nullo ([14]).

Si ha infine: *Se α è un* Q_0; *b, b' degli u, allora*

$$\alpha(b + b') = \alpha b + \alpha b'. \tag{15}$$

Infatti: se qualcuno degli elementi α, b, b' è nullo, il teorema è evidente. Supponiamo dunque α, b, b' non nulli.

Per il n. 4 si può porre, con x, y, z univocamente determinati,

$$\alpha = x/(b + b'), \qquad \alpha = y/b, \qquad \alpha = z/b',$$

cioè

$$x = \alpha(b + b'), \qquad y = \alpha b, \qquad z = \alpha b'.$$

Ma α è determinato da una sola successione $f_0, f_1, \ldots$, e per le (6) e (8) si ha:

$$\begin{aligned} F_n(b + b') &= 10^n \mathfrak{d}_n, && \text{con} \quad x = 1'\mathfrak{d} \\ F_n b &= 10^n \lambda_n, && \quad " \quad\;\; y = 1'\lambda \\ F_n b' &= 10^n \lambda_n', && \quad " \quad\;\; z = 1'\lambda'. \end{aligned}$$

([14]) C. Burali-Forti, *L. M.*, pag. 394; oppure S. Catania, *Grandezze e numeri*, pag. 22.

Dalla somma delle ultime due si ha $F_n(b+b') = 10^n(\lambda_n + \lambda_n')$ e per la 1ª, $\mathfrak{d}_n = \lambda_n + \lambda_n'$ e in conseguenza

$$l'\mathfrak{d} = l'(\lambda + \lambda') = l'\lambda + l'\lambda',$$

vale a dire $x = y + z$, c. d. d.

8. — Se α, β sono elementi qualunque di Q_0, definiamo la *somma di* α *con* β, *cioè* $\alpha + \beta$, *come quell'elemento* γ *di* Q_0 *tale che posto comunque* $\alpha = b/a$, $\beta = c/a$, *si ha* $\gamma = (b+c)/a$.

Risulta che: *Se* α, β *sono dei* Q_0, *allora* $\alpha + \beta$ *è un* Q_0 *univocamente determinato.*

Infatti: se invece di porre $\alpha = b/a$, $\beta = c/a$ si pone (n. 5) $\alpha = b'/a'$, $\beta = c'/a'$, esisterà certo un numero reale θ tale che $a' = \theta a$; ma allora dovrà pure essere $b' = \theta b$, $c' = \theta c$ e quindi

$$\frac{b'+c'}{a'} = \frac{\theta b + \theta c}{\theta a} = \frac{\theta(b+c)}{\theta a} = \frac{b+c}{a}, \text{ c. d. d.}$$

Ne segue subito: *Se* α, β *sono dei* Q_0 *ed* a *è un* u, *allora* $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$.

Di qui risulta che la precedente definizione di $\alpha + \beta$ dà precisamente la somma di due N_0, quando α, β sono degli N_0.

Si ha ancora: *Se* α, β, γ *sono dei* Q_0, *allora* $(\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$.

Infatti: se a è un u non nullo si ha $(\beta + \gamma)\alpha a = \beta\alpha a + \gamma\alpha a = (\beta\alpha + \gamma\alpha)a$, c. d. d., poichè a è arbitrario.

9. — Dal n. 8 risulta che $+$ *è un'operazione per i* Q_0 [15].

Si ha allora il teorema: *I* Q_0 *formano una classe di grandezze omogenea rispetto all'operazione* $+$; *cioè sono verificate le condizioni* I-IX *di* " *Logica Matematica* ", *pag. 380.*

Ci limiteremo a dimostrare la condizione IX, cioè che: *ogni classe di* Q_0, *limitata superiormente, ha un* l' *che è un* Q_0.

Infatti: sia v una classe di Q_0 limitata superiormente. Allora va è una classe di u limitata superiormente e si può

([15]) C. Burali-Forti, *L. M.*, pag. 155 e segg.; oppure S. Catania, *Grandezze e numeri*, pag. 2.

porre $l'(va) = \alpha a$, essendo α un Q_0. È chiaro che la classe formata dai Q_0 minori di qualche v, coincide con la classe dei Q_0 minori di α e quindi $\alpha = l'v$, c. d. d.

10. — Possiamo ora ridurre i Q_0 a limiti superiori di classi della specie (b).

Precisamente, se ricordiamo la (6) e la (8), abbiamo il teorema seguente, che non abbisogna di ulteriore dimostrazione:

Se a, b sono elementi di u, $a \neq 0$, $f_0, f_1, f_2, \ldots$ è la Suc$(b; a)$ *ed* U *è la classe degli* R_0 *i cui elementi sono* $10^{-n} F_n = F_n/10^n$, *per* $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, *allora b/a è il limite superiore della classe* U; $b/a = l'$U.

Dal procedimento seguìto in questa Nota risulta che operando soltanto nel campo degli R_0 è *impossibile* dare una definizione logicamente corretta degli irrazionali come limiti superiori di classi (b), perchè sono appunto questi limiti superiori (non esistenti nel campo R_0 per gli irrazionali) che dovrebbero dare gli irrazionali.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 3 Aprile 1927

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. C. F. PARONA
VICEPRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Grassi, Panetti, Sacco, Majorana, Boggio, Garelli e Repossi, il quale funge da Segretario.

Scusano l'assenza il Presidente Ruffini ed i Soci: Guidi, Somigliana e Mattirolo.

Viene letto il verbale della precedente adunanza, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Presidente ricorda che il Segretario Mattirolo trovasi a Parigi perchè gli è stata conferita una medaglia d'oro della " Société d'Acclimatation ", e, poichè è sicuro che i Colleghi sono lieti dell'onore tributato al caro Collega, ritiene opportuno che ne rimanga cenno nel verbale.

Il Presidente in seguito presenta una pubblicazione fatta in occasione del quarantesimo anno d'insegnamento del Socio corrispondente prof. Gino Loria. L'Accademia ne prende atto con compiacimento.

Il Socio Majorana trasmette da parte del Comitato per le onoranze a Volta l'invito ufficiale all'Accademia perchè nomini

una rappresentanza al Congresso dei Fisici, che si terrà a Como nella prima quindicina di settembre.

Il Presidente ringrazia e chiede ai Colleghi se credono di fare proposte al riguardo. Si resta d'accordo di lasciare al Presidente la nomina della rappresentanza.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 24 Aprile 1927

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. C. F. PARONA
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Guidi, Grassi, Somigliana, Panetti, Ponzio, Pochettino e il Segretario Mattirolo.

Scusano l'assenza il Socio Sacco e il Presidente Ruffini chiamato a Roma per la Commissione Giudicatrice del Premio Reale di Storia, all'Accademia dei Lincei.

Il Segretario legge il verbale dell'adunanza precedente, che risulta approvato senza osservazioni; ma con un ringraziamento cordiale del Socio Mattirolo riconoscente all'atto gentile dell'Accademia che ha voluto fosse ricordata nel verbale la recente onorificenza accordatagli dalla *Société Nationale d'Acclimatation de France.*

Il Presidente comunica alla Classe notizia di un grave accidente occorso a S. E. il Ministro Fedele, ferito in una disgrazia automobilistica, egli, facendo voti per la sua pronta guarigione, propone sia inviato a S. E. un telegramma di felicitazione per lo scampato pericolo e di auguri fervidissimi. La Classe applaude ed approva.

Il Presidente comunica quindi alla Classe recenti notizie sull'andamento della malattia dalla quale è colpito il Socio Garelli. Le condizioni essendo stazionarie, il Presidente interpretando il sentimento dei colleghi procurerà di far conoscere i fervidi voti dell'Accademia alla famiglia del collega.

Il Socio Grassi presenta e fa dono alla Biblioteca Accademica di un suo lavoro edito nell'anno 1876, dal titolo: *Sulla Misura delle Altezze mediante il Barometro.* Egli discorre brevemente dei risultati allora ottenuti, facendo rilevare, in special modo, l'influenza che può avere l'epoca nella quale si fanno le

osservazioni. Il Socio PANETTI ricorda che il lavoro del Socio GRASSI acquista nel momento attuale maggiore importanza nei riguardi della aviazione.

Il Socio Segretario MATTIROLO fa quindi omaggio della sua Commemorazione del botanico belga JEAN MASSART, la cui figura appare circondata da una doppia aureola di gloria, perchè egli sacrificò sè stesso sugli altari della patria e della scienza. Egli fa rilevare i grandi meriti di questo scienziato nel quale il Belgio ha perduto un patriota eminente, uno scienziato insigne, fecondo e modesto. Uno di quegli uomini che per la inesausta attività di iniziative, operano come i fermenti, suscitando, da soli, molteplici energie latenti, indirizzandole al culto del bene e del bello.

Il Socio Direttore della Classe, SOMIGLIANA, presenta quindi per la inserzione negli *Atti* una Nota del sig. F. P. CANTELLI dal titolo: *Intorno alla risoluzione di un problema demografico*, nella quale dimostra come, già da tempo, e prima della pubblicazione del prof. TRICOMI, avesse egli con mezzi di dimostrazione semplicissimi risolto il problema in modo molto elementare e rapido senza dover ricorrere a considerazioni di calcolo integro-differenziale, alle quali ora ricorre il prof. TRICOMI.

Il Socio GUIDI presenta quindi una sua Nota sulle " *Esperienze termiche su di una diga a volta* „ e ne discorre brevemente accennando alle opportunità che gli resero possibili tali esperimenti i cui risultati possono avere importanza pratica certo non indifferente.

Il Socio GRASSI comunica quindi per l'inserzione negli *Atti* una sua Nota dal titolo *Una questione di acustica musicale*, nella quale si riferiscono i recenti suoi studi che riguardano la risoluzione di un problema relativo alle alterazioni che si possono osservare nei suoni così detti *flautati* degli strumenti musicali ad arco.

Egli ha osservato che nel violino spesse volte il cantino dà il suono flautato di ottava un po' calante, ma che i cantini che presentano questo fenomeno non hanno diametri uguali per tutta la loro lunghezza: in cantini con diametro medio di 55 centesimi di millimetro le differenze salgono talvolta a 4-5 centesimi. Il che vuol dire che la sezione e quindi il peso per unità di lunghezza può variare perfino del 20 %. Agli inconvenienti lamentati si può però ovviare coll'uso oggi adottato dei cantini metallici.

LETTURE

Intorno alla risoluzione di un problema demografico.

Nota di FRANCESCO P. CANTELLI
presentata dal Socio nazionale residente C. Somigliana

1. — In una recente Nota, di cui ho potuto prendere visione in questi giorni, il Prof. F. Tricomi (1) tratta il seguente problema:

" Un certo gruppo di popolazione di cui si conosce la legge di mortalità (supposta invariabile nel tempo) ha una data composizione all'origine dei tempi, ossia è nota la sua iniziale legge di distribuzione secondo le età; si conosce, inoltre, la legge con cui varia la sua natalità nell'intervallo $(0, t)$: Si chiede la composizione del gruppo al tempo t, cioè la forma della funzione $\varphi(x, t)$ tale che il prodotto $100\,\varphi(x, t)\,dx$ esprima il percento di popolazione del gruppo che, nell'istante t, ha età compresa tra x e $x + dx$ ".

Il problema trattato, è noto agli studiosi di statistica matematica, ha il suo corrispondente nell'assicurazione obbligatoria per l'invalidità e la vecchiaia degli operai. Naturalmente invece di parlare di tassi di natalità si dovrà parlare di tassi d'iscrizione alla assicurazione, all'età obbligatoria prescritta. E si tratta di un problema meno facile di quello precedentemente indicato perchè sono da considerare eliminazioni, dal campo degli assicurati attivi, per cause diverse, delle quali alcune, come vecchiaia e invalidità, costituiscono la fonte degli oneri continuativi della Cassa.

(1) *Risoluzione di un problema demografico*, " Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino ", vol. LXII, 1927; adunanza del 14 nov. 1926.

È pur noto che in problemi del genere di quello accennato è cura dello statistico di assumere come note quelle funzioni che, adattandosi alla rilevazione statistica, possano condurre, in modo esplicito, a soluzioni praticamente utilizzabili. Così, nel caso qui trattato, l'analisi per la risoluzione del problema diventa semplicissima quando si consideri come nota, invece della natalità, ossia del tasso istantaneo di natalità, la densità dei nati.

In questa Nota metto in evidenza, nel paragrafo seguente, come si pervenga in modo elementare, e molto rapido, alla risoluzione del problema, trasportando concetti e formole che si trovano pubblicati in una mia recente Nota (¹), al caso che qui si tratta. In questa analisi si assume come nota la densità dei nati in luogo della natalità.

Nel paragrafo 3 mostro come, in modo immediato, discenda da quanto è detto nel paragrafo precedente la risoluzione del problema nel caso che si consideri come cognita la natalità, cioè il tasso istantaneo di natalità. La soluzione risulta evitandosi completamente ogni equazione integro-differenziale, considerata dal Prof. Tricomi.

Questi problemi vengono qui trattati nel caso più generale in cui la legge di mortalità sia supposta variabile nel tempo.

Nel paragrafo 4 faccio una digressione per mostrare come facendo un cammino inverso, e particolarizzando, si deduca immediatamente l'equazione fondamentale integro-differenziale cui è pervenuto il Prof. Tricomi per la risoluzione del problema. Questa equazione rimane della stessa forma anche nel caso in cui la mortalità si supponga variabile nel tempo.

Nell'ultimo paragrafo, infine, mostro come un caso particolare molto interessante, esplicitamente risoluto dal Prof. Tricomi, si possa analizzare rapidamente e completamente in base a quanto è detto nel paragrafo 2 e come le formule di risoluzione non sieno che le corrispondenti di altre che si trovano nella mia citata Nota, della quale il primo capitolo non è che un riassunto di un lavoro del von Bortkiewicz.

(¹) *Sui metodi di calcolo nelle assicurazioni sociali.* Appendice alla pubblicazione *Le Assicurazioni sociali,* edita dalla Cassa Nazionale per le Assicurazioni sociali, vol. II, marzo-aprile 1926, n. 2.

Credo che le considerazioni di questa Nota integrino opportunamente quelle svolte dal Prof. Tricomi.

2. — Suppongo noti:

a) i numeri dei viventi, all'origine dei tempi, distribuiti per età;

b) le probabilità di sopravvivenza supposte variabili nel tempo;

c) il numero dei nati supposto variabile nel tempo.

Indichi:

$n(x, t)\,dx$, il numero dei viventi al tempo t, aventi età compresa tra x e $x + dx$, onde $n(x, t)$ rappresenta la densità dei viventi in età x e al tempo t;

$n(0, t)\,dt$, il numero dei nati nell'intervallo $t, t + dt$, onde $n(0, t)$ rappresenta la densità dei nati al tempo t;

$V(t + x, t)$, la probabilità che un individuo nato al tempo t sia vivente al tempo $t + x$, cioè in età x;

ω, l'età limite per la quale $V(t + x, t) = 0$, qualunque sia t, per ogni $x > \omega$;

$S(t)$, la popolazione vivente al tempo t.

Per il principio della probabilità composta, la probabilità che un individuo vivente in età x, al tempo $t + x$, sia vivente in età y, cioè al tempo $t + y$, è data da

$$\frac{V(t + y, t)}{V(t + x, t)} .$$

In particolare la probabilità che un individuo avente l'età x, all'origine dei tempi, sia vivente dopo t anni, è data da

$$\frac{V(t, -x)}{V(0, -x)} . \tag{1}$$

Ciò premesso, è ovvio che la popolazione al tempo t è data dai sopravviventi al tempo t, che provengono dai viventi all'origine dei tempi, aumentati dai sopravviventi al tempo t che provengono dai nati tra il tempo zero e il tempo t.

Si scrive pertanto, immediatamente, tenendo presenti i simboli indicati e la (1)

$$S(t) = \int_0^{\omega} n(x, 0)\,\frac{V(t, -x)}{V(0, -x)}\,dx + \int_0^t n(0, s)\,V(t, s)\,ds. \tag{2}$$

La (2) fa determinare $S(t)$ in base ad elementi noti.

Bisogna determinare $n(x, t)$. Questa determinazione è già stata implicitamente fatta nello scrivere la (2).

Distinguiamo due casi: se $x > t$, gli $n(x, t)$, esistenti al tempo t, in età x, sono i sopravviventi degli esistenti all'origine dei tempi in età $x - t$; se $x \leq t$, gli $n(x, t)$ sono i sopravviventi, al tempo t, dei nati al tempo $t - x$. Segue quindi:

$$n(x, t) = n(x - t, 0) \cdot \frac{V(t, t - x)}{V(0, t - x)} \qquad \text{se} \qquad x > t \tag{3}$$

$$n(x, t) = n(0, t - x) \cdot V(t, t - x) \qquad \text{se} \qquad x \leq t \tag{4}$$

espressioni che permettono la determinazione di $n(x, t)$ in base ad elementi noti.

I concetti informatori delle (2), (3), (4) corrispondono precisamente a quanto è detto a pag. 23 della mia Nota citata. E la (2) ha una esemplificazione nelle espressioni (94), (95) della Nota stessa.

La *densità relativa dei viventi* in età x, al tempo t, resta determinata da

$$\varphi(x, t) = \frac{n(x, t)}{S(t)} \,. \tag{5}$$

Osservazione. — Conviene osservare che la (4)

$$n(x, t) = n(0, t - x) \,.\, V(t, t - x) \tag{6}$$

ha significato anche per $x > t$. Essa dice infatti, in ogni caso, che i viventi in età x, al tempo t, sono i sopravviventi al tempo t dei nati al tempo $t - x$.

3. — In questo paragrafo suppongo noti:

a) l'ammontare della popolazione e la densità relativa dei viventi alle diverse età $[\varphi(x, 0)]$, all'origine dei tempi;

b) le probabilità di sopravvivenza supposte variabili nel tempo;

c) i tassi istantanei di natalità supposti variabili nel tempo.

Pongo

$$n(0, t) = S(t) \,.\, N(0, t) \tag{7}$$

onde $N(0, t)$ rappresenta il *tasso istantaneo di natalità* al tempo t.

Essendo per la (5)

$$(7)' \qquad n(x, t) = S(t) \,.\, \varphi(x, t)$$

risulta, per definizione,

$$(8) \qquad \varphi(0, t) = N(0, t).$$

Tenendo conto di (7)' e (7), la (2) si può scrivere:

$$(9) \quad S(t) = S(0) \int_0^{\omega} \varphi(x, 0) \frac{V(t, -x)}{V(0, -x)} dx + \int_0^t S(s)\, N(0, s)\, V(t, s)\, ds$$

e, tenendo conto di (7)' e (8), le (3) e (4) diventano:

$$(10) \quad S(t)\, \varphi(x, t) = S(0)\, \varphi(x - t, 0) \frac{V(t, t - x)}{V(0, t - x)} \qquad \text{se} \quad x > t$$

$$(11) \quad S(t)\, \varphi(x, t) = S(t - x)\, N(0, t - x)\, V(t, t - x) \quad \text{se} \quad x \leq t.$$

Le (9), (10), (11) sono adatte a risolvere il problema. Si osservi, invero, che nella (9) la incognita è $S(t)$. Ora il primo degli integrali del secondo membro della (9) stessa, così come è stata subito scritta, è una funzione di t, certamente non nulla per tutti i valori di t compresi tra l'origine dei tempi e un confine inferiore ω_0 degli anni di vita che possono ancora vivere gli individui esistenti al tempo zero in età compresa, per es., tra zero e un anno. Allora la (9), per $t \leq \omega_0$, è un'equazione integrale di seconda specie di Volterra nella incognita $S(t)$ e le (10), (11) fanno determinare $\varphi(x, t)$. Assumendo il tempo ω_0 come nuova origine dei tempi le stesse formole risolutive permettono il prolungamento della determinazione delle incognite, e così via.

Il lettore vede facilmente come la sostituzione del tasso di natalità alla densità dei nati complichi notevolmente la trattazione del problema, almeno nel caso generale. E non mi sembra dubbio che per la trattazione numerica del problema, nella assicurazione obbligatoria per l'invalidità e la vecchiaia, convenga ricorrere alla densità dei nuovi assicurati invece che ai tassi istantanei delle nuove iscrizioni all'assicurazione.

Voglio però far rilevare, per il problema che qui interessa, che se ci accontentiamo di avere dei rapporti tra le funzioni $\varphi(x, t)$, non occorre più la conoscenza della $S(t)$.

In altri termini, se indicando con x_1, x_2 due età vogliamo giudicare dell'importanza che la natalità, o la densità dei nati, ha nella distribuzione relativa degli individui aventi età x_1 e x_2, basterà studiare il rapporto $\varphi(x_1, t) : \varphi(x_2, t)$ che resta indipendente da $S(t)$, sia in base alle (10), (11), sia in base alle (3), (4), (5).

4\. — Mostro come rifacendo un cammino inverso si ottenga immediatamente, in un caso più generale, l'equazione integro-differenziale alle derivate ordinarie alla quale è pervenuto il Prof. Tricomi.

Derivando la (9) rispetto a t e osservando che $V(t, t) = 1$, si ha immediatamente:

$$S'(t) = S(0) \int_0^{\omega} \frac{\varphi(x, 0)}{V(0, -x)} V'(t, -x)\, dx + S(t)\, N(0, t) + \int_0^t S(s)\, N(0, s)\, V'(t, s)\, ds \tag{12}$$

che è l'equazione richiesta, nell'incognita $S(t)$, e alla quale possono applicarsi le stesse, precise considerazioni applicate dal Tricomi a pag. 27 della sua Nota.

Nel caso particolare che la probabilità di sopravvivenza sia indipendente dal tempo, possiamo scrivere:

$$V(t, u) = V(t - u)$$

e quindi:

$$V(0, -x) = V(x); \qquad V(t, -x) = V(t + x).$$

La (12) allora si scrive:

$$S'(t) = S(0) \int_0^{\omega} \frac{\varphi(x, 0)}{V(x)} V'(t + x)\, dx + S(t)\, N(0, t) + \int_0^t S(s)\, N(0, s)\, V'(t - s)\, ds \tag{13}$$

in cui ω è, ora, l'età estrema della vita, *unica* per i nati di qualsiasi epoca.

Il primo termine del secondo membro della (13), ponendo $t + x = y$, può scriversi:

$$W(t) = S(0) \int_t^{\omega} V'(y) \frac{\varphi(y-t, 0)}{V(y-t)} dy \tag{14}$$

e allora la (13) coincide perfettamente con la (12) della Nota del Prof. Tricomi.

5. — Il Tricomi, nell'ultimo paragrafo del suo lavoro, mette in evidenza un caso particolare.

Mostro qui come la soluzione di questo caso si deduca immediatamente dalla (6).

Questa, nella ipotesi che la legge di sopravvivenza sia *indipendente dal tempo*, e pure nell'ipotesi che le *densità relative dei viventi* $\varphi(x, t)$ *siano indipendenti dal tempo*, può scriversi:

$$n(x, t) = S(t) \,.\, \varphi(x) = n(0, t - x) \,.\, V(x). \tag{15}$$

Dalla (15) si ricava, considerando le derivate rispetto a x,

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = - \frac{n'(0, t-x)}{n(0, t-x)} + \frac{V'(x)}{V(x)} \tag{16}$$

nella quale è evidente il significato demografico dei singoli termini.

Indicando con k una costante reale dovrà essere perciò:

$$\frac{n'(0, t-x)}{n(0, t-x)} = k \tag{17}$$

dalla quale si ricava:

$$n(0, t) = n(0, 0)\, e^{kt}. \tag{18}$$

La (15), tenendo pure conto della (18), lascia scrivere:

$$n(x, t) = n(0, 0)\, e^{k(t-x)}\, V(x) \tag{19}$$

e pertanto risulta, per la popolazione al tempo t,

$$S(t) = n(0, 0)\, e^{kt} \int_0^{\omega} e^{-kx}\, V(x)\, dx. \tag{20}$$

Le relazioni (18), (19), (20) corrispondono alle (5), (6), (14) della mia citata Nota.

Dalla (20) risulta:

$$S(t) = S(0)\,e^{kt}. \tag{21}$$

Da (19) e (21) si ha:

$$\varphi(x) = \frac{n(x,t)}{S(t)} = \frac{n(0,0)}{S(0)}\,e^{-kx}\,V(x) = N(0,0)\,e^{-kx}\,V(x). \tag{22}$$

Da (18) e (21) si deduce:

$$N(0,t) = N(0,0). \tag{23}$$

Infine, poichè ovviamente, come del resto risulta dalla prima eguaglianza delle (22), l'integrale tra zero e ω di $\varphi(x)$ è eguale all'unità, segue dalle (22) stesse:

$$\frac{1}{N(0,0)} = \int_0^{\omega} e^{-kx}\,V(x)\,dx. \tag{24}$$

Il significato demografico di k risulta da (17), (21), (24).

Roma, 22 marzo 1927.

Esperienze termiche su di una diga a volta.

Nota del Socio naz. resid. CAMILLO GUIDI

Nella mia pubblicazione *Studî sperimentali su costruzioni in cemento armato* (Torino, Bona, 1926) ho riferito su alcune esperienze che furono eseguite l'anno scorso su di una diga a volta allo scopo di studiare le deformazioni prodotte dalla pressione idrostatica, e preannunziai altre esperienze per l'esame delle deformazioni termiche. Queste poterono aver luogo il 3 del corrente mese, mercè la gentile collaborazione dell'Azienda Elettrica Municipale, alla quale, ed in particolare modo all'egregio Direttore, Comm. Ing. Bisazza, esprimo, con grato animo, i più vivi ringraziamenti, come ringrazio il Laboratorio di Elettrotecnica della nostra Scuola, i miei Assistenti e le altre cortesi persone che mi aiutarono nella prova.

La fig. 1 riproduce in pianta e sezioni il serbatoio semicircolare che servì già per lo studio delle deformazioni prodotte dalla pressione idrostatica. Ritengo superfluo ripeterne la descrizione, che il lettore trova nell'opuscolo citato.

Riempito d'acqua il detto serbatoio, se ne elevò la temperatura per mezzo di resistenze elettriche che si fecero percorrere da una corrente a 500 Volt, e si misurarono le deformazioni della volta interna che funzionava da diga.

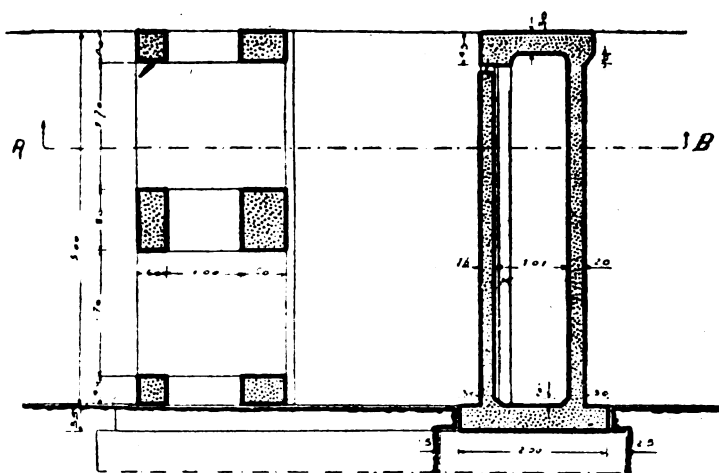
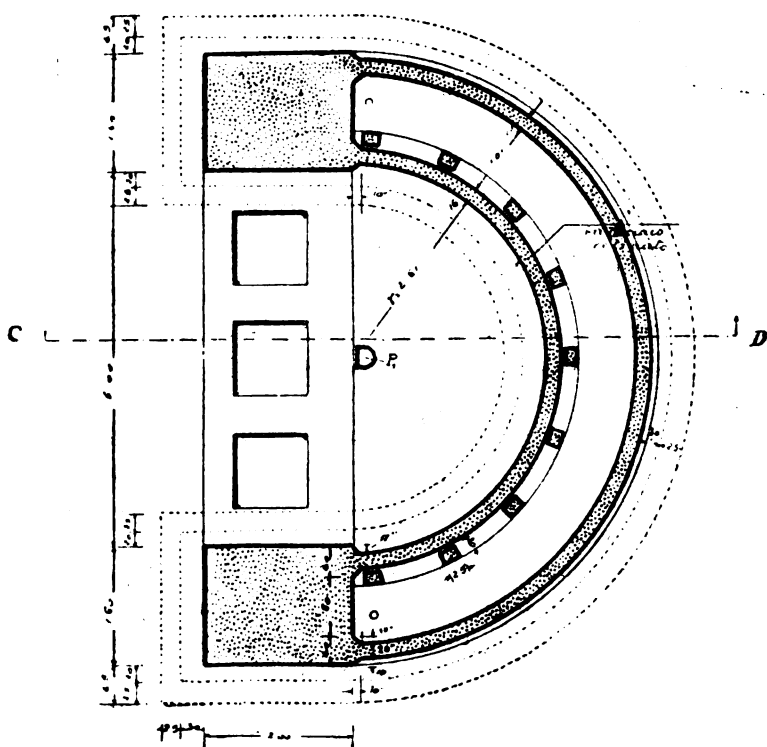
Quattro termometri annegati nello spessore della volta, col bulbo immerso in un pozzetto a mercurio, segnavano la temperatura della muratura. Si ammise che la temperatura dell'estradosso della volta, a regime stabilito, potesse ritersi uguale a quella dell'acqua, mentre quella dell'intradosso venne misurata con tre coppie termoelettriche, applicate una al vertice e le altre due a $\pm 45°$ dalla sezione al vertice, in un anello di volta a

SEZIONE A - B 1:100

Fig. 1.

m. 1,75 dalla fondazione. Dato il piccolo spessore della volta (cm. 16) si ritiene che la variazione media di temperatura della volta sia data dalla semisomma della variazione t_e della temperatura di estradosso e della variazione t_i della temperatura d'intradosso.

Con un *palmer* al centesimo di millimetro vennero misurati gli spostamenti radiali dei tre suddetti punti.

L'energia elettrica fu attinta da un cavo a 6000 Volt, e mediante un trasformatore si ebbe una corrente a 500 Volt.

L'esperienza ebbe inizio alle ore 7 e si fecero letture alle ore 10,45'; 12; 14; 16,30'; 18,30'; 20,30'; 23; 24,30'. La fig. 2 rappresenta colla linea — · — · — · la legge di variazione della temperatura dell'acqua che, come si è detto, si ritiene uguale a quella dell'estradosso della volta, e colla linea — — — — la legge di variazione della temperatura del paramento d'intradosso data dalle coppie termoelettriche.

All'inizio dell'esperienza si constatarono le seguenti temperature:

temperatura dell'acqua . . . . . = 13°
„ della parete d'intradosso = 10°,6
„ ambiente . . . . = 10°.

La corrente elettrica fu interrotta alle ore 12 e fu riattaccata alle 16,30' per la durata ancora di un'ora. L'andamento dei due diagrammi indica un regime sufficientemente stabile dalle ore 18,30' alle ore 23.

In questo periodo di tempo la semisomma delle ordinate dei due diagrammi è rimasta costante come mostra l'orizzontale a tratto pieno, e precisamente si ha:

$$\frac{13 + t_e + 10,6 + t_i}{2} = 31^\circ,4$$

da cui si deduce

$$\frac{t_e + t_i}{2} = 19^\circ,6.$$

Nello stesso periodo di tempo gli spostamenti dei tre punti sopra indicati, rispetto alla loro posizione primitiva, furono di mm. 0,30; 0,30; 0,38. Questo ultimo valore però merita minor

fiducia, perchè l'intradosso della volta rimase in quel punto fortuitamente bagnato per un certo tempo; ammetteremo perciò

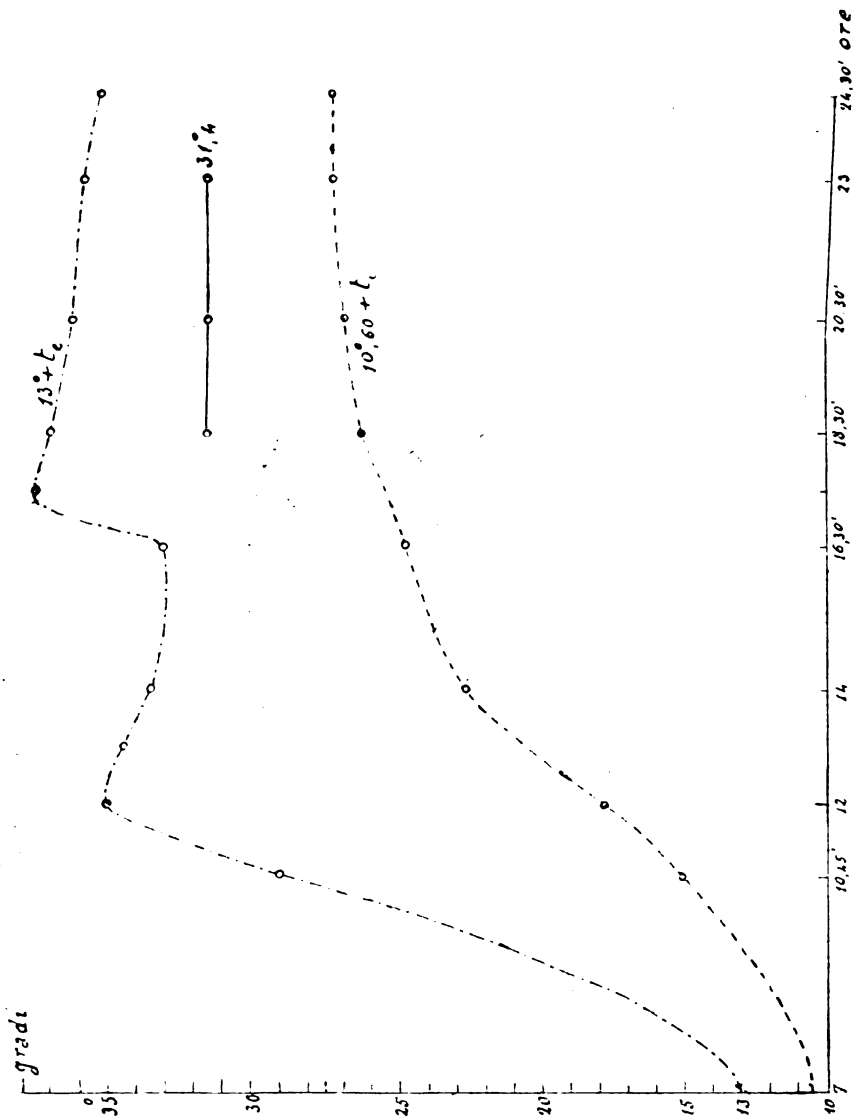



Fig. 2.

nei tre punti lo stesso spostamento di mm. 0,30 e quindi per un solo grado di variazione di temperatura mm. $\frac{0,30}{19,6} = 0,0153$.

Ora gli spostamenti termici radiali prodotti da una variazione uniforme di t_0 gradi di temperatura in un anello di volta riguardato come indipendente, *cioè non solidale cogli anelli contigui*, si ottengono semplicemente considerando (V. *Statica delle dighe per laghi artificiali*, 2ª ediz., pag. 61) che l'effetto prodotto da tale variazione è affatto analogo a quello generato dalla

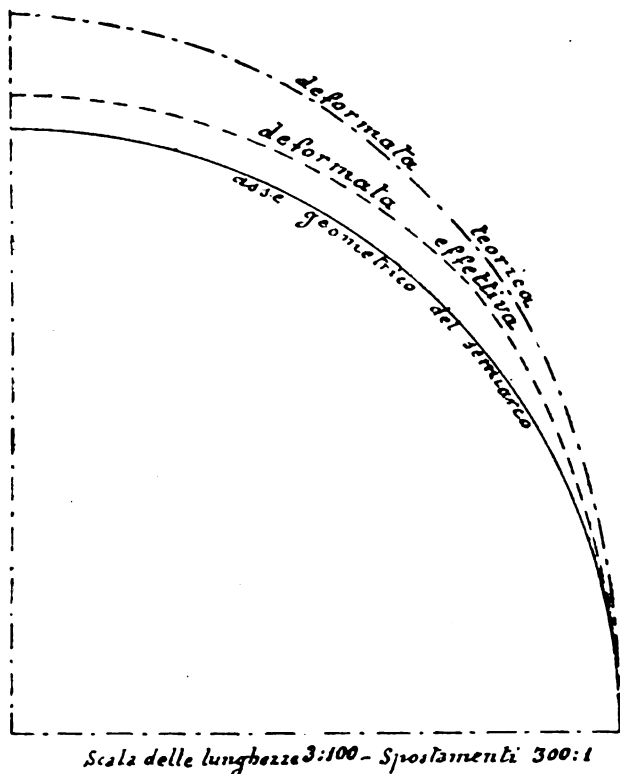



Fig. 3.

pressione idrostatica, ed invero come per quest'ultima la causa della deformazione è l'accorciamento unitario $\frac{pr}{Eh}$, così per una variazione termica la causa è la dilatazione unitaria espressa da αt_0; basta quindi sostituire $\frac{pr}{Eh}$ con αt_0, ossia moltiplicare gli spostamenti dovuti alla pressione idrostatica per $\alpha t_0 : \frac{pr}{Eh} =$

$\frac{Eh}{pr} \alpha t_0$. Nel caso attuale (V. opuscolo citato) per un'atmosfera, cioè per $p = 1$ e

per $\psi =$	18	45	72	90°
si è ottenuto $\frac{\Delta}{p} =$	0,00678	0,03121	0,05286	0,05772 cm.

ed essendo $\frac{Eh}{r} \alpha = \frac{150000 \times 16}{269} 0,00001 = 0,089219$,

per $\psi =$	18	45	72	90°
risulta $\frac{\Delta}{t_0} =$	0,00060	0,00278	0,00472	0,00515 cm.

Ricordiamo che per effetto della differenza $t_e - t_i$ l'arco non cambia di forma (V. *Statica delle dighe*, 2ª ediz., pag. 62).

Nella fig. 3 sono rappresentate la deformata teorica e quella che risulterebbe dalle misurazioni eseguite. Anche qui, come per la pressione idrostatica, si rileva un notevole divario fra le due deformate, dovuto senza dubbio all'effetto di lastra, da cui prescinde la teoria dell'arco. Questa rilevante diminuzione nella deformazione induce a ritenere che nelle dighe ad arco, verso il basso, dove più si risente l'influenza dell'incastro, gli sforzi termici interni siano notevolmente inferiori a quelli dati dalla teoria dell'arco elastico.

Torino, 24 aprile 1927.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'8 Maggio 1927

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: D'Ovidio, Peano, Parona, Guidi, Grassi, Somigliana, Panetti, Pochettino, Boggio, Sacco, Repossi e il Segretario Mattirolo.

Scusa l'assenza il Socio Garelli fortunatamente convalescente.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, il quale risulta approvato dopo alcune osservazioni dei Soci Somigliana e Peano.

Il Presidente comunica all'adunanza il telegramma di S. E. il Ministro Fedele, nel quale S. E. ringrazia l'Accademia per i voti che gli furono espressi nell'occasione del recente suo infortunio automobilistico.

Prende quindi la parola il Socio Somigliana che presenta, nel nome del prof. Giancarlo Vallauri, Presidente dell'Associazione Elettrotecnica Italiana, il volume riferentesi all'*Opera di Alessandro Volta,* antologia di scritti originali del Volta, raccolti ed illustrati da Francesco Massardi e pubblicati a cura della Associazione Elettrica Italiana nel 1° Centenario dalla morte del Volta. Il Socio Somigliana fa rilevare tutta la importanza dell'opera, specialmente interessante per l'accurata cronologia della vita del Volta e per le interessanti relazioni del prof. Massardi, che sintetizzano il contenuto dei volumi della

raccolta nazionale dell'opera del VOLTA. Il Presidente ringrazia e ringrazierà l'Associazione Elettrotecnica che ha dotato la nostra Biblioteca dell'importante volume.

Il Segretario MATTIROLO presenta quindi la *Fisiologia Generale del Ricambio* di cui è autore apprezzato P. RONDONI. Quest'opera fa parte del *Trattato di Anatomia Patologica* già diretto dal compianto nostro Socio Senatore PIO FOÀ e tratta in modo speciale del *Diabete,* della *Gotta,* dell'*Obesità,* ecc. Il Presidente ringrazia per il dono, e dà incarico al Segretario di porgere ringraziamenti alla Società Editrice che ha cortesemente inviato l'omaggio.

Il Socio SOMIGLIANA presenta il volume II delle *Lezioni di Meccanica razionale* dei professori Tullio LEVI-CIVITA, nostro Socio nazionale, e di Ugo AMALDI, facendo rilevare i pregi di quest'opera che ha incontrato, sia in Italia che all'estero, il favore del pubblico.

Il Socio SACCO presenta un suo lavoro intitolato: *Il Glacialismo nella Valle d'Aosta*, pubblicato ora dall'Ufficio Idrografico del Po (Ministero dei L. P.), lavoro da lui eseguito, per quanto si riferisce alle zone elevate (ancora oggi glaciate) durante il periodo della guerra e proseguito poi nelle regioni basse, sino allo sbocco vallivo, collo studio dell'anfiteatro morenico d'Ivrea. Al lavoro sono connesse due grandi carte glaciologiche alla scala di 1 a 100.000, dove sono indicati i depositi morenici in varia forma di ripiani, di archi, ecc., che permettono di ricostituire l'importanza e l'evoluzione successiva del glacialismo aostano, dall'inizio dell'Epoca glaciale sino al momento presente.

Il Presidente ringrazia il Socio SACCO.

Il Socio Vice Presidente PARONA presenta a nome del sig. Dr. Federico HERMANN, in omaggio all'Accademia, una copia di due grandi stereogrammi tectonici delle Alpi valdostane centrali e delle Alte Valli aostane meridionali: il primo nella scala di 1 a 37.500, l'altro nella scala di 1 a 25.000. Sono due panorami geologicamente ed anche artisticamente suggestivi, che

esprimono graficamente i risultati del lavoro, nel quale questo geologo italiano da anni persevera, mentre estende di sua lodevole iniziativa il rilevamento geologico del vasto bacino della Dora. In questo, come in altri precedenti lavori, l'A. si dimostra seguace della moderna scuola geologica svizzera e porta un appassionato contributo in appoggio alla sintesi inspirata al concetto direttivo dei ricoprimenti, anche in rapporto alla provenienza delle *pietre verdi*, interpretate come dovute a intrusioni simiche. Ma un completo apprezzamento del lavoro potrà farsi in seguito all'esame della monografia illustrativa che è attualmente in preparazione.

Il Socio Somigliana presenta quindi per l'inserzione negli *Atti* una Nota del prof. Luigi Volta dal titolo: *Determinazione della differenza di Longitudine dell'Osservatorio di Pino Torinese da quella di Greenwich per mezzo della radiotelegrafia*, e ne discorre facendo rilevare i risultati ai quali l'Autore è giunto con tale nuovo metodo di determinazione.

Il Socio Guidi nel nome del sig. Ottorino Sesini presenta quindi per gli *Atti* una Nota dal titolo: *Calcolo semplificato di solidi elastici scomponibili in tronchi prismatici.*

Terminata la presentazione delle Note originali da inserirsi negli *Atti*, il Presidente dà la parola al Socio Peano, il quale dà lettura della Relazione, della quale è stato incaricato dalla Accademia nell'adunanza precedente. La Relazione Peano è accolta con plauso dalla Classe e dà luogo ad una discussione, alla quale prendono parte alcuni dei Soci presenti, accogliendosi infine la proposta del Presidente che la Relazione Peano, prima di essere pubblicata negli *Atti*, sia comunicata anche alla Classe di Scienze morali, trattandosi di una questione d'interesse generale.

Il Presidente annunzia quindi prossima una riunione dei Commissari per l'assegnazione del Premio Bressa.

LETTURE

Sulla riforma del calendario.

Relazione del Socio nazionale residente GIUSEPPE PEANO

Il Ministro della Pubblica Istruzione trasmise a questa R. Accademia il Rapporto sulla riforma del calendario, presentato dal Comitato speciale di studio alla Commissione consultiva delle Comunicazioni e del transito della Società delle nazioni, di pag. 167;

e il Verbale della Commissione, 23 e 24 giugno 1926.

Il Ministro prega l'Accademia di comunicare le eventuali osservazioni in merito ai surriferiti documenti. L'Accademia nella riunione del 24 aprile mi diede tale incarico.

Come è noto, il nostro calendario rimonta ai primi re di Roma. I mesi seguivano la luna. Giulio Cesare fece l'anno di 365 giorni, più un bisestile ogni 4 anni. I mesi conservarono il nome antico, ma più non seguirono la luna. Il calendario giuliano si diffuse in tutto l'impero romano. Il Cristianesimo vi aggiunse la settimana, e la Pasqua, che dipende dalla luna. In fine, il pontefice Gregorio XIII, nel 1582 fece scorrere il calendario solare di 10 giorni, e rese comuni gli anni 1700, 1800, 1900. Egli fece pure scorrere il calendario lunare, da cui dipende la Pasqua, di 3 giorni. La riforma gregoriana fu accolta dapprima nei paesi cattolici; e dopo molti anni dai protestanti. L'Inghilterra la adottò nel 1752. La Russia passò dal calendario giuliano al gregoriano il 1° gennaio 1918, la Grecia il 1° marzo 1923; e così si ricompose l'unità del calendario.

Il Parlamento Turco col principio di questo anno adottò il nostro calendario.

Anche il Giappone adottò il nostro calendario. La società di Confucio in Cina dice (*Relazione*, pag. 93) che il governo cinese adottò il calendario gregoriano, ma il pubblico rimane fedele al confuciano.

Il succedersi dei mesi con vario numero di giorni, e degli anni comuni e bisestili, rende la corrispondenza fra le date e i giorni della settimana un problema che il pubblico risolve solo sfogliando i calendarii dei vari anni. Sonvi tavole che permettono di risolvere questo problema. Ma esso appartiene all'aritmetica elementare. Della stessa natura è il problema di determinare la data della Pasqua.

Nella Relazione si dà il consiglio di insegnare nelle scuole le regole per risolvere i problemi sul calendario. Queste regole si trovano ad esempio nel mio libro: *Giochi di aritmetica*, editore Paravia.

Alcuni, per opporsi ai riformisti, dichiarano (pagg. 49, 52, 65, ...) che questa complicazione nel calendario è un prezioso strumento di controllo e di verifica nelle date.

Il Comitato ricevette ben 185 progetti di riforma del calendario. Tutti dichiarano però che la riforma si potrà solo ottenere quando tutte le autorità saranno concordi ad accettarla, onde non distruggere l'unità del calendario, oggi faticosamente raggiunta.

Si propose di modificare l'èra, i nomi dei mesi, il principio dell'anno, ed ogni punto del nostro calendario. Ma queste proposte non ebbero adesione. Due sole proposte ricevettero vasta approvazione dai corpi consultati: il calendario perpetuo e la stabilizzazione della Pasqua.

Il calendario perpetuo divide l'anno in quattro trimestri, coi mesi di 30, 30 e 31 giorni; ogni trimestre consta di 13 settimane esatte. Rimangono nell'anno uno o due giorni complementari, detti giorni bianchi, da porsi fuori della settimana. Il calendario di un trimestre servirà per tutti i trimestri dello stesso anno, e degli anni successivi.

La data della Pasqua ora varia dal 22 marzo al 25 aprile. Tutti i corpi consultati sono favorevoli a fissarla alla prima o seconda domenica di aprile; alcuni si astennero, nessuno fu contrario. Furono specialmente favorevoli le autorità scolastiche,

perchè così sarebbero più uniformi i programmi delle scuole nei varii anni. Molte Camere di commercio ritengono che la fissazione della Pasqua favorisce l'industria dei vestiti, alberghi e trasporti.

La nostra Accademia già fu interpellata su questo problema, e nella riunione del 2 marzo 1924 si appoggiò la proposta del calendario perpetuo. e della fissazione della Pasqua, come nella *Relazione*, pag. 73.

Chi scrive è di opinione che convenga sempre aderire alle medesime proposte, che già ottennero l'enorme maggioranza: calendario perpetuo, e fissazione della Pasqua.

Determinazione della differenza di longitudine dell'Osservatorio di Pino Torinese da Greenwich per mezzo della radio-telegrafia.

Nota di LUIGI VOLTA

presentata dal Socio nazionale residente C. Somigliana

Nel Luglio 1925 l'Osservatorio di Pino Torinese poteva disporre di un impianto radio-ricevente atto a far registrare cogli stessi circuiti e colla stessa punta del cronografo così i segnali ritmici di Parigi e di Nauen come gli appulsi dei passaggi stellari osservati al piccolo meridiano di Bamberg.

L'impianto consiste, oltrechè dell'apparecchio ricevente a 5 valvole e a reazione, di un organo microfonico di collegamento tra questo e il cronografo e di un dispositivo pel quale il micrometro registratore del Bamberg, introdotto nel circuito di placca dell'apparecchio radio, funziona da interruttore, chiudendo esso circuito corrispondentemente ai contatti del suo tamburo. Messo allora l'apparecchio radio in reazione, in grado cioè di produrre oscillazioni e quindi un fischio persistente, e regolata la reazione stessa così da ottenere la nota più atta a far agire, attraverso l'organo microfonico di collegamento, il cronografo, ad ogni chiusura di contatto l'apparecchio radio viene eccitato, il fischio prodotto, l'ancora del cronografo attratta.

Detto organo microfonico di collegamento, come il dispositivo per la registrazione dirò così radioelettrica dei passaggi stellari costituiscono le pratiche e semplici soluzioni di due precisi problemi tecnici che avevo proposto all'Ing. Vocca di questo Osservatorio e di ambedue è ampiamente detto da lui

stesso in apposita nota (1). L'apparecchio di collegamento è stato costruito dal sig. Latini, tecnico della stessa specola, il quale ebbe occasione di fornirne parecchi altri esemplari a Osservatori, Istituti e Gabinetti di Geodesia.

In possesso di questi mezzi, che rappresentavano in parte innovazioni atte ad aumentare la precisione nella raccolta dei segnali e ad ovviare agli inconvenienti derivanti dalla diversità dei circuiti registranti rispettivamente segnali e passaggi stellari, volli subito farne la prova con un saggio di determinazione di differenza di longitudine del pilastro del piccolo meridiano da Greenwich, servendomi sia dei segnali r. t. di Parigi, sia di quelli di Nauen.

Le osservazioni si svolsero nel periodo compreso fra la notte dal 27 al 28 Luglio e la notte dal 15 al 16 Agosto.

Durante questo periodo si compierono determinazioni di tempo con abbondanti programmi al suddetto strumento, dotato di micrometro registratore e si raccolsero al cronografo, oltre i contatti dei passaggi stellari trasmessi da esso micrometro, i segnali di Parigi e di Nauen diurni e notturni tutte le volte che fu possibile.

Le determinazioni di tempo cominciavano avanti le segnalazioni radiotelegrafiche di Parigi (23^h t. m. c.) e si protraevano sino a quelle di Nauen (1^h t. m. c.), cosicchè i programmi sono andati variando durante il periodo, per l'abbandono, man mano, delle prime stelle e l'aggiunta di nuove alla fine della serata e per l'abbandono ancora di qualche stella via via diversa imposto dalla recezione di Parigi.

Dapprima, volendo anche ricevere i numeri corrispondenti ai tempi siderali del primo e ultimo segnale parigino di ciascuna serie, trasmessi una mezz'ora circa dopo i segnali stessi, le osservazioni di passaggi stellari subivano una pausa di quasi un'ora, talchè esse si erano suddivise in due distinte determinazioni di tempo, con rispettive polari e australi. Si preferì poi ridurre il programma a un'unica determinazione di tempo, colla breve interruzione sufficiente a registrare i segnali ritmici di Parigi, rinunciando alla recezione delle relative indicazioni orarie.

(1) R. Osservatorio Astronomico di Pino Torino, N° 5 (Dagli "Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino", vol. 61, 1926).

Quadro I. — **Riassunto delle Osservazioni.**

Stella	Grandezza	α_{1925}	δ_{1925}	VII 27–28	VII 28–29	VII 30–31	VII 31–VIII 1	VIII 3–4	VIII 5–6	VIII 6–7	VIII 7–8	VIII 8–9	VIII 14–15	VIII 15–16	Totali
π Her	3.4	17h12m	+ 36°54′	*		*									2
b Oph	4.3	22	— 24 6			(*)	(*)								2
β Dra	3.0	29	+ 52 21	*	*		*								3
ι Her	3.8	37	+ 46 3	*	*		*								3
35 Dra	5.0	53	+ 76 58	(*)	(*)	(*)	(*)								4
o Her	3.8	18 5	+ 28 45	*	*	*	*								4
2583 Gr	5.4	13	+ 42 8	*	*		*								3
109 Her	3.9	21	+ 21 44	*		*	*								3
α Lyr	0.1	34	+ 38 43	*	*	*	*	*	*	*	*				8
110 Her	4.3	42	+ 20 28							*	*				2
β Lyr	var.	47	+ 33 16			*	*								2
o Dra	4.8	50	+ 59 18					*	*	*	*	*			5
γ Lyr	3.3	56	+ 32 35				*	*	*	*	*	*			6
ι Lyr	5.1	19 5	+ 35 59					*	*	*	*	*	*	*	7
k Cyg	4.0	15	+ 53 14			*			*	*	*	*	*	*	7
ι Cyg	3.9	28	+ 51 34			*	*				*	*	*	*	6
ϑ Cyg	4.6	34	+ 50 3				*	*					*	*	4
δ Cyg	3.0	43	+ 44 57	*				*		*			*	*	5
β Aql	3.9	52	+ 6 13					(*)	(*)		(*)		(*)	(*)	5
γ Sge	3.7	55	+ 19 17			(*)									1
c Sgr	4.6	58	— 27 55					(*)	(*)	(*)	(*)	(*)			5
k Cep	4.4	20 11	+ 77 29			(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)	(*)			7
γ Cyg	2.3	20	+ 40 1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	11
41 Cyg	4.1	26	+ 30 7		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	10
υ Cap	5.3	36	— 18 24		(*)		(*)						(*)	(*)	4
α Del	3.9	36	+ 15 39					*	*	(*)	*	(*)			5
ε Cyg	2.6	43	+ 33 41		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	10
H^1 Dra	5.6	51	+ 80 16										(*)	(*)	2
ν Cyg	4.0	54	+ 40 53			*	*	*	*	*	*	*			7
ξ Cyg	3.9	21 2	+ 43 38					*	*	*	*	*		*	6
τ Cyg	3.8	12	+ 37 43						*	*	*	*	*	*	6
1 Peg	4.2	19	+ 19 29							*	*	*	*	*	5
g Cyg	5.3	27	+ 46 13									*	*	*	3
74 Cyg	5.1	34	+ 40 4										*	*	2
π^2 Cyg	4.3	44	+ 48 58										*	*	2
16 Peg	5.0	50	+ 25 34											*	1
Totale stelle osservate . .				10	10	15	18	15	15	17	18	16	16	18	168
„ „ orarie				9	8	11	14	12	12	14	15	13	13	15	136

Le stelle osservate furono scelte tutte dall'American Ephemeris: l'α Lyr, l'unica stella notevolmente più luminosa delle altre, fu sempre osservata attraverso un opportuno schermo di garza.

Tutto quanto riguarda il complesso delle osservazioni stellari risulta chiaro dal Quadro I, nel quale con un asterisco si dinotano le stelle osservate durante le singole rispettive sere; l'asterisco stesso è chiuso fra parentesi quando si tratta di stelle polari, australi e di qualche equatoriale che hanno servito a determinare l'azimut, ma che non sono entrate a dare la correzione dell'orologio.

Si rileva dallo specchietto precedente che furono compiute in 11 sere 168 osservazioni stellari, di cui 32 per la determinanazione dell'azimut e 136 per la correzione dell'orologio, su 36 stelle diverse (essendosi in generale osservate ripetutamente le stesse stelle, specialmente le centrali della lista) distribuite lungo oltre quattro ore e mezza di A. R.

Il confronto dei tempi determinati a Pino Torinese con quelli riferiti al meridiano di Greenwich e trasmessi rispettivamente da Parigi e da Nauen colla radio, esigeva l'identità delle posizioni stellari adottate nelle rispettive determinazioni di tempo per la coppia Pino-Parigi e la coppia Pino Amburgo, affinchè le differenze di longitudine di Pino da Greenwich dedotte rispettivamente dai segnali parigini e dai segnali tedeschi non fossero affette da un errore fondamentale derivante dalla diversità dei sistemi delle posizioni adottate.

Per il confronto coi tempi di Parigi mi sono perciò attenuto alle posizioni di Washington colle correzioni dell'Eichelberger (Vedi *Scientific Papers*, Vol. X, Part I, Amer. Ephem. 1925), tale essendo, dal 1° Gennaio 1925, il sistema su cui sono fondate le determinazioni di tempo del servizio orario parigino (Vedi Tomo II, “ Bull. Intern. Horaire „, pag. 4).

Per il confronto coi tempi di Nauen ho adottato invece le posizioni del Berl. Astron. Jahrb., come si pratica nelle determinazioni di tempo dell'Osservatorio marittimo di Amburgo. Solo per tre stelle ciò non era possibile, perchè esse non sono contenute nel N. Fund. Katalog dell'Auwers e precisamente: *b* Oph, 41 Cyg e H^1Dra; per esse ho adottato empiricamente delle correzioni per passare dalle posizioni dell'Eichelberger a

quelle dell'Auwers, correzioni dedotte per analogia da quelle di stelle vicine in α e δ.

Solo la seconda di esse stelle è una stella oraria, la quale può minimamente influire sulla correzione giornaliera dell'orologio; le altre due, osservate solo due volte ciascuna, hanno servito unicamente alla determinazione dell'azimut; dati i generalmente piccoli coefficienti dell'azimut stesso per le stelle orarie e un certo compenso fra i segni, pure per quest'altre due stelle, se anche si fossero adottate posizioni lievemente scostantisi dal sistema dell'Auwers, ne sarebbe venuta una quasi insensibile influenza sul risultato finale della differenza di longitudine fondata sui segnali di Nauen.

Al fine di impostare col maggior rigore il confronto fra i tempi locali e quelli ricevuti per radio, che ci deve fornire il valore cercato della longitudine, occorre preoccuparsi di raggiungere l'omogeneità dei termini di paragone anche per ciò che riguarda le piccole correzioni di nutazione lunare alle posizioni apparenti delle stelle. B. Wanach ha fatto recentemente notare nelle " Astron. Nachr. „ (N.° 5437) che, introducendo questi termini nelle posizioni delle polari e trascurandoli in quelle delle orarie, si ottiene bensì un valore più esatto dell'azimut, ma si ottiene una correzione dell'orologio affetta da un errore che può arrivare a $0^s,02$, di poco inferiore a quello che si può commettere trascurando, alle nostre latitudini, detti termini anche per le polari; ed ha proposto un procedimento approssimato per calcolare i ritocchi da apportarsi alla correzione dell'orologio dedotta da una stella oraria, per tenere il dovuto conto dei piccoli termini lunari. Il metodo presuppone che anche le effemeridi della polare o delle polari siano date indipendentemente da essi termini, come è praticato sin dal 1913 nel " Berl. Astr. Jahrbuch „, dove le correzioni relative alla nutazione lunare a corto periodo sono date separatamente.

Ciò premesso, importava sapere come fossero state dedotte, nei riguardi di questa nutazione, le posizioni apparenti delle stelle osservate a Parigi e ad Amburgo, giacchè è ovvio che bastava per Pino uniformarsi rispettivamente al procedimento seguìto nei due Osservatori per evitare (data la diversità non grande di latitudine) errori della natura sopradetta nelle differenze di tempo, su cui i valori della longitudine erano fondati.

E poichè nè a Parigi nè ad Amburgo dei piccoli termini lunari era stato tenuto conto, analogamente si procedette per le determinazioni di tempo di Pino: a tal fine, essendo anche le polari de' miei programmi comprese fra le stelle a effemeride decadica, bastò per tutte le stelle ricavare le posizioni apparenti dell'American Ephemeris colle correzioni dell'Eichelberger per il confronto con Parigi e le stesse corrette colla riduzione al sistema dell'Auwers, ossia, per la quasi generalità delle stelle, le posizioni apparenti del " Berliner ", per il confronto con Nauen.

Raccolgo nel Quadro II le correzioni dell'orologio dedotte da ciascuna serata d'osservazione (1) e seguendo ambedue le autorità.

QUADRO II. — **Correzioni del pendolo e andamenti.**

Data 1925	Δt Eichelb.	e. m. Δt serale	N° *	e. m. Δt p. 1 *	Δt B. A. J.	And.to diurno
Luglio 27.93^d	—64.254^s	0.010^s	9	0.030^s	—64.183^s	
" 28.95	.331	.023	8	.065	.263	—0.069^s
" 30.98	.443	.012	11	.041	.372	.065
" 31.95	.510	.008	14	.030	.442	.072
Agosto 3.98	.755	.014	12	.049	.686	.076
" 5.98	.900	.009	12	.030	.831	.085
" 6.97	.991	.013	14	.047	.923	.103
" 7.97	—65.106	.010	15	.039	—65.038	.090
" 8.98	.172	.006	13	.020	.098	.075
" 14.97	.951	.009	13	.034	.871	.123
" 15.98	—66.074	.011	15	.043	—66.009	
Medie semplici . .		0.011	12	0.039		

(1) Nei calcoli relativi sono stato validamente aiutato dall'ingegnere Vocca e dall'ing. dottor Invrea, dell'Osservatorio, i quali qui ringrazio.

Nella prima colonna, compresi nella data, si dànno gli istanti in centesimi di giorno medio dell'Europa centrale corrispondenti alla correzione stessa, l'error medio di questa e quello relativo all'osservazione di una sola stella oraria e si ripete anche il numero delle stelle su cui essa correzione è fondata. Occorre notare che gli errori medi ora detti si riferiscono alla riduzione fatta colle posizioni corrette dall'Eichelberger; con quelle del " Berliner Astron. Jahrbuch „ essi errori risultano un poco appena più alti e non si crede il caso di riportarli.

Aggiungo ancora gli andamenti diurni approssimati dell'orologio, dedotti colla nota formola parabolica applicata a tre determinazioni contigue di tempo. Anche questi andamenti sono stati dedotti colle posizioni dell'Eichelberger: quelli dedotti colle posizioni del " Berl. Astr. Jahrb. „ sono ben poco diversi.

Colla stessa formola parabolica furono dedotte le correzioni del pendolo Riefler (in campana pneumatica) per gli istanti precisi delle recezioni dei segnali di Parigi e di Nauen; salvo che per le serate estreme, con questo sistema di raggruppamenti di tutte le terne di determinazioni successive, la deduzione delle correzioni pendolari risulta fatta in doppio modo, sia per Parigi che per Nauen. Fra le correzioni dedotte da due raggruppamenti diversi raramente la differenza raggiunge il centesimo di secondo per gli istanti delle segnalazioni radiotelegrafiche diurne o per qualche sera mancante di determinazione di tempo; una sol volta, per un istante corrispondente a una segnalazione di Nauen (30 Luglio alle una), arriva a $0^s,015$.

Si tratta ora di dare un peso adeguato ai singoli confronti fra i tempi locali dedotti come or ora si è detto e i tempi ricevuti radiotelegraficamente.

Pei tempi locali, non ostante l'error medio diverso delle correzioni dell'orologio, si è creduto di dare lo stesso e massimo peso 4 alle correzioni relative ai confronti coi segnali di Parigi e di Nauen ricevuti la sera o la notte stessa di una determinazione di tempo, un peso metà (2) ai confronti fatti la mattina o il pomeriggio compresi fra due determinazioni di tempo fatte in giorni successivi e una unica volta separate da due soli giorni e infine il peso 1 a confronti diurni distanti di mezza giornata da una determinazione di tempo e non più di un giorno e mezzo dalla sua contigua (due casi per Parigi e Nauen) op-

pure giusto nel mezzo fra due determinazioni distanti di tre giorni (un caso per Parigi) o a confronti notturni frammezzo a due determinazioni di tempo non lontane più di due giorni (un caso per Parigi).

Non furono tenuti in conto per la determinazione della longitudine recezioni di segnali più lontane dalle determinazioni di tempo.

Anche ai tempi dei segnali ricevuti si è dato un peso secondo la distanza in tempo dalla determinazione oraria più vicina, ma con un criterio meno severo, in omaggio alla fiducia che dovrebbero meritare i dati forniti da un servizio scientifico internazionale accurato e continuativo, come quelli di Parigi e di Nauen. Le date delle determinazioni di tempo di Parigi come i tempi definitivi dei segnali ritmici estremi si trassero dal " Bulletin horaire "; quelle delle determinazioni di tempo di Amburgo, controllanti il servizio di Nauen, mi furono gentilmente comunicate da quel Direttore.

Si attribuì peso 4 ai tempi dei segnali corrispondenti a quelle date, 3 per le date contigue, 2 per le date lontane dalle prime di due giorni, uno per tutte le altre intermedie.

Si deve ancora tener conto della bontà della recezione; non parve il caso di conglobare l'incertezza derivante dalla recezione con quella dei tempi della stazione emittente, ma piuttosto di considerarla come un elemento d'incertezza gravante sui singoli corrispondenti valori della longitudine.

Il peso dovuto al giudizio sulla recezione è stato allora fissato 1, o 2, o 3, o 4 a seconda che la recezione stessa, durante la registrazione e dal rilievo della striscia — prima quindi dei calcoli di riduzione — era stata giudicata *cattiva*, *mediocre*, *discreta*, *buona* o *ottima* rispettivamente, tenuto conto anche delle coincidenze colte.

Il peso di un valore della longitudine dedotto da una serie notturna o diurna di segnali di Parigi o di Nauen risulterà adunque della forma: $\frac{p_1 \, p_2}{p_1 + p_2} \, P_r$, dove p_1 e p_2 sono i pesi competenti al tempo locale e al tempo radiotelegraficamente ricevuto, P_r il peso derivante dal giudizio sulla bontà della recezione.

Il peso complessivo attribuito ai singoli valori della diffe-

Quadro III. — **Attribuzione dei pesi.**

Data confronto		Confronti con Parigi				Confronti con Nauen			
		Peso correzione orologi		Peso recezione	Peso complessivo	Peso correz. orologi		Peso recezione	Peso complessivo
		Pino	Parigi			Pino	Nauen		
Luglio	27-28	4	1	2	1.6	4	4	3	6.0
„	28	2	1	3	2.0	2	3	3	3.6
„	28-29	4	1	2	1 6	4	3	1	1.7
„	30	1	1	2	1.0	—	—	—	—
„	30-31	4	1	2	1.6	4	1	1	0.8
„	31	2	1	4	2.7	2	1	3	2.0
„	31- 1	4	1	3	2.4	4	1	3	2.4
Agosto	1	1	2	3	2.0	1	1	1	0.5
„	2	1	3	2	1.5	—	—	—	—
„	3	—	—	—	—	1	1	4	2.0
„	3- 4	4	4	3	6.0	4	2	2	2.6
„	4	2	3	4	4.8	2	2	2	2.0
„	4- 5	1	3	3	2.2_5	—	—	—	—
„	5	2	2	2	2.0	2	3	3	3.6
„	5- 6	4	2	4	5.3	4	4	3	6.0
„	6	2	3	4	4.8	2	3	3	3.6
„	6- 7	4	4	2	4 0	4	3	3	5.1
„	7	2	3	3	3.6	2	2	3	3.0
„	7- 8	4	3	4	6.9	4	2	3	4.0
„	8	2	2	4	4.0	2	1	3	2.0
„	8- 9	4	2	2	2.7	4	1	2	1.6
„	14-15	4	3	3	5.1	4	2	3	4.0
„	15	2	2	4	4.0	2	1	2	1.3
„	15-16	4	2	4	5.3	4	1	3	2.4

renza di longitudine può essere discutibile per ciò che riguarda i criteri adottati: a questi non si può negare però il pregio dell'obbiettività, in quanto che sono stati preventivamente fissati, prima di ogni riduzione.

Il Quadro III riporta tutti i dati relativi a questa assegnazione dei pesi.

Nel Quadro IV si riportano i dati relativi ai tempi trasmessi e alle coincidenze osservate coi segnali di Parigi.

Analogamente nel Quadro V per Nauen.

Le date costituite da un solo numero si riferiscono ai confronti fatti di giorno, le altre a quelli notturni.

Non riporto le riduzioni dei singoli confronti fatti con Parigi e con Nauen, per economia di spazio: per fornire però tutti i dati necessari ad un eventuale controllo dei risultati, riporterò nelle tabelle citate i tempi siderali di Greenwich della 1ª e 300ª battuta per Parigi e i tempi medî pure di Greenwich della 1ª e 301ª battuta per Nauen e le coincidenze volta per volta valutate, segnando con un * quelle che, per esser meno sicure, furono come tali avanti la riduzione giudicate e nella riduzione stessa portate in computo con metà peso.

Per la deduzione dei due risultati finali relativi alle due stazioni emittenti di Parigi e di Nauen non resta più che dare per ciascun confronto la differenza media fra i tempi ricevuti e i tempi locali come erano dati dal pendolo Riefler, correggere questa differenza secondo i risultati delle determinazioni di tempo, fondate come s'è detto sulle posizioni dell'Eichelbergor per Parigi e su quelle del " Berliner Astronomisches Jahrbuch " per Nauen (V. Quadro II). Avuti così i singoli valori della differenza di longitudine, se ne farà la media pesata, e, tenuto conto dei singoli pesi e delle singole deviazioni da essa media, si dedurrà l'error medio del corrispondente risultato. Tali riduzioni sono riassunte nei Quadri VI e VII.

È a rilevarsi la costanza dei segni negativi degli scarti in un primo periodo e la costanza dei segni positivi degli scarti stessi per quasi tutto il resto della serie relativa ai segnali di Parigi, mentre per la serie di Nauen i segni analoghi sono assai meglio distribuiti.

L'accordo fra i due valori finali è soddisfacente, sia perchè la differenza fra di essi è dell'ordine della somma dei rispettivi

QUADRO IV. — Istanti estremi e coincidenze di Parigi osservate.

Data		Istante 1ª Battuta	Istante 300ª Battuta	Coincidenze osservate
		h m s	h m s	
Luglio	27-28	18 20 31.045	15 25 24.315	46-97 — 202-254
"	28	6 22 24.915	6 27 18.19	41-92-145-197-249-300*
"	28-29	18 24 19.115	18 29 12.39	51-103-155-209-261
"	30	6 30 2.32	6 34 55.59	18*-70*-121-174-226-278
"	30-31	18 32 55.59	18 37 48.87	33* — 136*-189-242*-294
"	31	6 34 49.73	6 39 43.00	43-95-147-198-250
"	31- 1	18 36 44.045	18 41 37.32	8-61-112-165-218-269
Agosto	1	6 38 38.65	6 43 31.925	42-94-146-197-251
"	2	6 42 27.75	6 47 21.025	1*-53-103-155-209-261
"	3- 4	18 48 12.24	18 53 5.51	32-84-137-189-240-292
"	4	6 50 7.37	6 55 0.65	41-93-145-197-249
"	4- 5	18 52 3.32	18 56 56.605	41-93-145-198-249
"	5	6 53 58.86	6 58 52.135	— — 123-176-229-280
"	5- 6	18 56 53.10	19 1 46.39	33-86-137-189-242-295
"	6	6 57 49.84	7 2 43.12	21-72-125-179-230-283
"	6- 7	18 59 45.43	19 4 38.70	3*-55-106-159-211-263
"	7	7 1 40.96	7 6 34.25	34-85-138-190-243-295
"	7- 8	19 3 36 50	19 8 29.78	12-65-117-170-221-273
"	8	7 5 31.89	7 10 25.165	35-87-140-194-245-297
"	8- 9	19 8 26.155	19 13 19.435	51*-103-155-208* —
"	14-15	19 32 34.685	19 37 27.96	13*-66-119-170-221 —
"	15	7 33 30.95	7 38 24.235	28-81-134-186-238-291
"	15-16	19 35 26.17	19 40 19.46	44-96-148-201-254

Quadro V. — **Istanti estremi e coincidenze di Nauen osservate.**

Data		Istante 1ª Battuta	Istante 301ª Battuta	Coincidenze osservate
		h m s	h m s	
Luglio	27-28	0 0 59.48	0 5 52.60	12-62-112-162-211-260
"	28	12 0 59.42	12 5 52.54	25-76-125-174-224-273
"	28-29	0 0 59.35	0 5 52.47	38-86-136*-186*-236-284
"	30-31	0 0 59.36	0 5 52.48	1*-52*-101-152-201-252-300*
"	31	12 0 59.33	12 5 52.45	16-65-116-165-215-264
"	31- 1	0 0 59.31	0 5 52.46	32*-82-132-181*-230 —
Agosto	1	12 0 59.25	12 5 52.40	45*-94*-144*-193-242-290
"	3	12 0 59.22	12 5 52.37	5-54-103-154-203-252-301
"	3- 4	0 0 59.21	0 5 52.36	— 69-120-170 — —
"	4	12 0 59.25	12 5 52.40	— 90*-138-188-239 —
"	5	12 0 59.29	12 5 52.44	20-69-118-168-219-269
"	5- 6	0 0 59.32	0 5 52.47	— 88-138-186-236-286
"	6	12 0 59.32	0 5 52.48	— 53-103-153-203-251-299
"	6- 7	0 0 59.39	0 5 52.55	23-72-121-172-221-270
"	7	12 0 59.29	12 5 52.45	36-86-134-185-233-283
"	7- 8	0 0 59.27	0 5 52.43	50-99-148-197-246-296
"	8	12 0 59.27	12 5 52.43	18-67-118-169-217-266
"	8- 9	0 0 59.23	0 5 52.39	33-83-132-182-233-282
"	14-15	0 0 59.32	0 5 52.46	42-91-141-192-241-290
"	15	12 0 59.35	12 5 52.49	7*-56-105-155-204-255
"	15-16	0 0 59.35	0 5 52.49	25-77-126-174-226-274

Quadro VI. — **Deduzione di $\Delta\lambda$ dai segnali di Parigi.**

Data	Tempo Green. meno Tempo Riefler	Correzioni Riefler	$\Delta\lambda$	Peso	Scarto
	m s	m s	m s		s
Luglio 27-28	—32 10.806	—1 4.256	—31 6.550	1.6	—0.046
„ 28	10.836	4.296	.540	2.0	— 56
„ 28-29	10.849	4.332	.517	1.6	— 79
„ 30	10.992	4.415	.577	1.0	— 19
„ 30-31	11.011	4.442	.569	1.6	— 27
„ 31	11.060	4.475	.585	2.7	— 11
„ 31- 1	11.094	4.511	.583	2.4	— 13
Agosto 1	11.126	4.550	.576	2.0	— 20
„ 2	11.224	4.630	.594	1.5	— 2
„ 3- 4	11.352	4.753	.599	6.0	+ 3
„ 4	11.385	4.788	.597	4.8	+ 1
„ 4- 5	11.436	4.824	.612	2.25	+ 16
„ 5	11.489	4.860	.629	2.0	+ 33
„ 5- 6	11.506	4.899	.607	5.3	+ 11
„ 6	11.542	4.942	.600	4.8	+ 4
„ 6- 7	11.595	4.990	.605	4.0	+ 9
„ 7	11.656	5.049	.607	3.6	+ 11
„ 7- 8	11.716	5.105	.611	6.9	+ 15
„ 8	11.776	5.140	.636	4.0	+ 40
„ 8- 9	11.797	5.171	.626	2.7	+ 30
„ 14-15	12.512	5.950	.602	5.1	+ 6
„ 15	12.583	6.011	.572	4.0	— 24
„ 15-16	12.649	6.072	.577	5.3	— 19

Media pesata — $31^{m}6^{s}.596 \pm 0^{s}.005$ (e. m.)

E. m. di un confronto di peso 1: $\pm$ 0 .044.

QUADRO VII. — **Deduzione di $\Delta\lambda$ dai segnali di Nauen.**

Data		Tempo Green. meno Tempo Riefler	Correzioni Riefler	$\Delta\lambda$	Peso	Scarto
		m s	m s	m s		s
Luglio	27-28	—32 10.783	—1 4.189	—31 6.594	6.0	—0.016
„	28	10.828	4.230	.598	3.6	— 13
„	28-29	10.855	4.266	.589	1.7	— 21
„	30-31	11.038	4.373	.665	0.8	+ 54
„	31	11.060	4.409	.651	2.0	+ 41
„	31- 1	11.116	4.446	.670	2.4	+ 59
Agosto	1	11.131	4.486	.645	0.5	+ 35
„	3	11.247	4.647	.600	2.0	— 11
„	3- 4	11.310	4.688	.622	2.6	+ 12
„	4	11.379	4.722	.657	2.0	+ 46
„	5	11.379	4.794	.585	3.6	— 25
„	5- 6	11.444	4.833	.611	6.0	0
„	6	11.463	4.877	.586	3.6	— 24
„	6- 7	11.500	4.926	.574	5.1	— 37
„	7	11.583	4.986	.597	3.0	— 13
„	7- 8	11.593	5.041	.552	4.0	— 59
„	8	11.707	5.072	.635	2.0	+ 25
„	8- 9	11.782	5.099	.683	1.6	+ 72
„	14-15	12.545	4.876	.669	4.0	+ 59
„	15	12.515	5.939	.576	1.3	— 35
„	15-16	12.647	6.003	.644	2.4	+ 34

Media pesata — $31^m 6^s.611 \pm 0^s.008$ (e. m.)

E. m. di un confronto di peso 1: $\pm$ 0 .062.

errori medi, sia perchè un maggior disaccordo era a temersi tanto in conseguenza di un possibile errore nel valore della longitudine da Greenwich delle due stazioni emittenti, tanto a cagione dei diversi istrumenti e sistemi di determinazione di tempo a Parigi e ad Amburgo, tanto infine a cagione della diversità dei modi e degli errori di segnalazione r. t.

Le somme dei pesi relative a ciascuna serie, se si ammette per ambedue identica l'unità di peso, starebbero tra loro come 77,15 e 60,2, cioè come 1,23 a 1,00. I pesi dei due risultati dedotti unicamente dall'error medio di questi starebbero tra loro invece come 2,56 a 1,00.

Volendo tener conto approssimativo di tutti gli elementi da cui può derivare l'attendibilità dei due separati risultati finali di $\Delta\lambda$ e cioè: numero delle osservazioni, accordo interno dei singoli valori, bontà della recezione, sicurezza della correzione di tempi ricevuti, ecc., e volendo attenerci nello stesso tempo a un criterio semplice di combinazione dei due risultati, non parrà ingiustificato assegnare i pesi 2 e 1 rispettivamente alle differenze di longitudine fondate su Parigi e su Nauen, il che porterebbe al seguente valore finale complessivo della differenza di longitudine del pilastro del piccolo meridiano di Bamberg da Greenwich:

$$\Delta\lambda = -31^m\ 6^s.600 \pm 0^s.007 \text{ (e. m.)}.$$

Calcolo semplificato di solidi elastici scomponibili in tronchi prismatici.

Nota dell'Ing. OTTORINO SESINI
presentata dal Socio nazionale residente C. Guidi

Tra i procedimenti in uso nella Meccanica Tecnica per la trattazione di sistemi elastici piani scomponibili in tronchi esattamente o prossimamente prismatici, i metodi grafici fondati sulla teoria dell'ellisse di elasticità permettono nel modo più semplice di tener conto anche delle deformazioni dovute allo sforzo assiale ed al taglio. Coi procedimenti analitici il computo di tali deformazioni complica notevolmente i calcoli, tanto che spesso ci si limita a tener conto delle sole deformazioni di flessione. Tale semplificazione non è però sempre lecita, per gli eccessivi errori a cui può dar luogo.

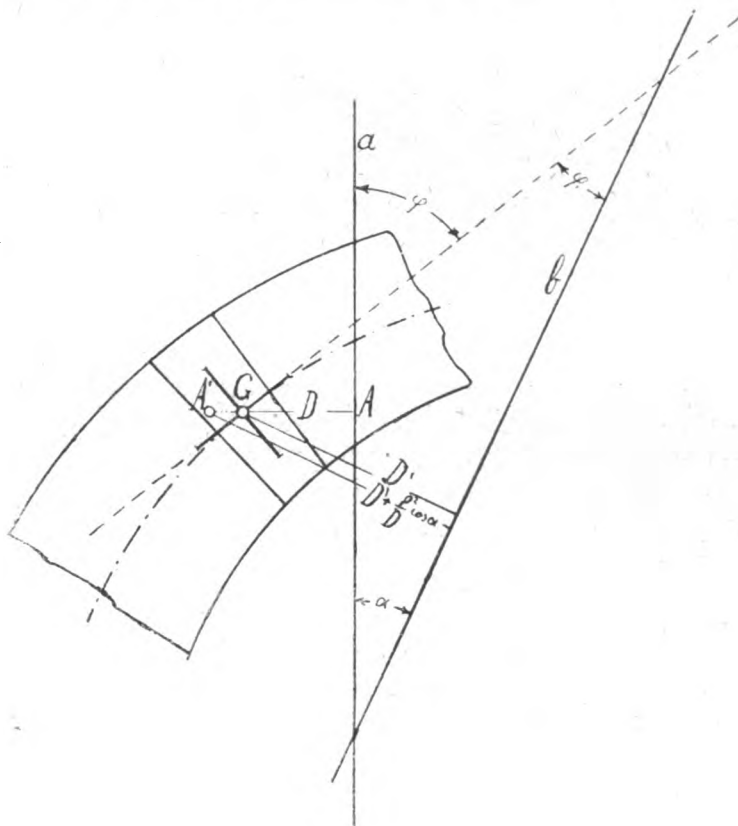
Nei casi, assai frequenti, in cui bisogna tener conto delle deformazioni dovute alla flessione ed allo sforzo assiale, potendosi trascurare quelle dovute al taglio, i procedimenti analitici sono suscettibili di notevoli semplificazioni, senza perdere in esattezza (anzi con qualche vantaggio), per mezzo delle considerazioni seguenti.

L'ellisse di elasticità di un tronco di solido compreso tra due sezioni rette ed abbastanza corto per poter essere considerato come prismatico, ha i semiassi ρ_1 normale all'asse del solido e ρ_2 tangente all'asse stesso, rispettivamente eguali:

il primo a ρ, raggio d'inerzia della sezione retta, giacente nel piano del sistema;

il secondo a $\sqrt{\frac{\Delta s^2}{12} + \chi \frac{E}{G} \rho^2}$, oppure a $\frac{\Delta s}{\sqrt{12}}$ secondo che si computa anche la deformazione dovuta al taglio, ovvero la

si trascura, indicando con Δs la lunghezza del tronco, con χ il fattore di taglio, con E e con G i moduli di elasticità rispettivamente normale e tangenziale.

Ne consegue che per un tronco di lunghezza infinitesima ds il primo semiasse risulta uguale a ρ mentre il secondo può ritenersi uguale a $\sqrt{\chi \frac{E}{G}} \cdot \rho$ oppure a 0, secondo che si tien conto o meno delle deformazioni dovute al taglio. Siccome poi $\chi \frac{E}{G}$

è sempre maggiore di 1 (circa 3 per sezione rettangolare), se supponiamo che anche il secondo semiasse dell'ellisse di elasticità sia uguale a ρ, veniamo a porci in condizioni intermedie tra il procedimento più esatto e quello approssimato che trascura completamente le deformazioni dovute al taglio. L'ellisse di

elasticità del tronco elementare si trasforma in un cerchio di raggio ρ, con notevole semplificazione dei calcoli.

Infatti, data nel piano una retta a, distante D dal baricentro elastico G del tronco, il suo antipolo A' rispetto all'ellisse di elasticità del tronco stesso, viene a trovarsi sul prolungamento della normale AG alla retta data, a distanza da G $A'G = \frac{\rho^2}{D}$. La distanza di detto antipolo da un'altra retta b, formante colla prima un angolo α e distante D' da G, è data da: $A'B = D' + \frac{\rho^2}{D} \cos \alpha$.

Il momento centrifugo dW_{ab} del peso elastico elementare $\frac{ds}{EJ}$ rispetto alle due rette a e b è:

$$dW_{ab} = \frac{ds}{EJ} D\left(D' + \frac{\rho^2}{D} \cos \alpha\right) = \frac{ds}{EJ} DD' + \frac{ds}{EF} \cos \alpha ,$$

indicando con F l'area della sezione retta e con J il suo momento di inerzia rispetto all'asse di flessione.

Se a è la linea d'azione di una forza R applicata alla sezione terminale del solido e b è la linea secondo cui si valuta lo spostamento δ di un punto solidale colla suddetta sezione terminale, risulta:

$$\delta = R \int \frac{DD'}{EJ} ds + R \cos \alpha \int \frac{ds}{EF}$$

dove gli integrali si intendono estesi a tutto il solido compreso tra la sezione di incastro e quella terminale.

Alla medesima conclusione si giunge coll'applicazione dell'equazione dei lavori virtuali. Indicando con $M = RD$, $N = R \cos \varphi$ e $T = R \operatorname{sen} \varphi$ le sollecitazioni a flessione, a sforzo normale ed a taglio per una sezione generica dovute alla forza R; con $M_1 = D'$, $N_1 = \cos \varphi_1$ e $T_1 = \operatorname{sen} \varphi_1$, le analoghe sollecitazioni dovute ad una forza fittizia 1, agente secondo la retta b, risulta:

$$\delta = \int \frac{MM_1}{EJ} ds + \int \frac{NN_1}{EF} ds + \int \chi \frac{TT_1}{GF} ds$$

cioè:

$$\delta = R \int \frac{DD'}{EJ} ds + R \int \frac{\cos \varphi \cos \varphi_1}{EF} ds + R \int \chi \frac{\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi_1}{GF} ds.$$

Essendo $\chi \frac{E}{G} > 1$, se si tien conto solo di una parte $\left(\frac{1}{3}\right.$ circa, per sezioni rettangolari$\left.\right)$ della deformazione dovuta al taglio, cioè dell'ultimo termine, si può scrivere:

$$\delta = R \int \frac{D D'}{E J} ds + R \int \frac{\cos \varphi \cos \varphi_1 + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \varphi_1}{E F} ds,$$

od anche, essendo $\varphi - \varphi_1 = \alpha$:

$$\delta = R \int \frac{D D'}{E J} ds + R \cos \alpha \int \frac{ds}{E F} .$$

Con tali espressioni del momento centrifugo dei pesi elastici e dello spostamento di un punto, le equazioni determinatrici delle deformazioni e delle incognite iperstatiche si semplificano notevolmente, comparendo in esse non già gli angoli che definiscono l'orientamento dei singoli tronchi, variabili da tronco a tronco, ma soltanto l'angolo compreso tra la linea d'azione della forza e la retta degli spostamenti, il quale angolo è spesso retto o nullo; ciò pur conseguendo una esattezza un po' maggiore di quella che si ottiene coi metodi comuni che trascurano le deformazioni dovute al taglio.

Tale procedimento, applicato alla ricerca della curva delle pressioni in un arco incastrato, conduce a note formole in uso per la determinazione della spinta orizzontale degli archi, le le quali formule, in base a quanto si è detto, risultano molto più approssimate di quanto appare dalle dimostrazioni che comunemente se ne dànno.

A titolo di esempio eseguiamo il calcolo del momento di inerzia del peso elastico rispetto all'asse orizzontale baricentrico x, di un arco circolare di raggio medio r, di spessore costante h e con angolo al centro $2\varphi_0$.

Tenendo conto anche delle deformazioni dovute al taglio, sappiamo che tale momento di inerzia è dato da:

$$J_x = r \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{y^2}{EJ} d\varphi + r \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\cos^2 \varphi}{EF} d\varphi + r \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{\chi \operatorname{sen}^2 \varphi}{GF} d\varphi \qquad \text{(a)}$$

da cui, indicando con s lo sviluppo, con l la corda e con f la

freccia dell'arco medio, si ottiene (V. C. Guidi, *Statica delle dighe di sbarramento*):

$$J_x = \frac{6\,r^2 l}{E h^3}\left(\frac{s}{l} + \frac{r-f}{r} - 2\,\frac{l}{s}\right) + \frac{l}{E h}\left\{\frac{s}{l} + \left(\frac{s}{l} - \frac{r-f}{r}\right)\right\}.$$

Col procedimento ora esposto si avrebbe:

$$J_x = r\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{y^2}{EJ}\, d\varphi + r\int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{d\varphi}{EF} = \frac{6\,r^2 l}{E h^3}\left(\frac{s}{l} + \frac{r-f}{r} - 2\,\frac{l}{s}\right) + \frac{s}{E h}$$

mentre trascurando completamente le deformazioni dovute al taglio, ossia coll'espressione (a), privata dell'ultimo termine, si otterrebbe:

$$J_x = \frac{6\,r^2 l}{E h^3}\left(\frac{s}{l} + \frac{r-f}{r} - 2\,\frac{l}{s}\right) + \frac{l}{E h}\left\{\frac{s}{l} - \frac{l}{2}\left(\frac{s}{l} - \frac{r-f}{r}\right)\right\}.$$

Dal confronto tra le tre espressioni di J_x si vede che la seconda è notevolmente più semplice ed anche più approssimata che non la terza.

Pisa, 3 maggio 1927.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 22 Maggio 1927

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. C. F. PARONA
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Peano, Guidi, Somigliana, Panetti, Sacco, Herlitzka, Pochettino, Boggio e il Segretario Mattirolo.

Scusano l'assenza il Socio D'Ovidio e il Presidente Ruffini.

Il Segretario dà lettura del verbale della precedente adunanza, che rimane approvato senza osservazioni.

Il Presidente comunica all'Accademia l'omaggio di un volume inviato dal sig. E. G. Dehaut dal titolo: *Études d'Anthropotomie et de Zoologie générale*, per il quale saranno inviati i ringraziamenti dell'Accademia.

Il Presidente avverte i Soci che la nomina di S. A. il Duca degli Abruzzi a membro residente della R. Accademia è stata approvata con decreto Sovrano, e che il diploma relativo fu già trasmesso per il tramite della Casa Ducale a S. A.

Brevemente ricorda il Presidente le benemerenze scientifiche del prof. Gustavo Tschermak deceduto a Vienna il giorno 9 maggio corr. nella grave età di anni 92. L'Illustre era nostro Socio corrispondente fino dall'8 febbraio 1885. Egli sarà commemorato in una prossima adunanza dal nostro Socio Repossi.

Comunica infine una lettera del Socio Grassi per mezzo della quale egli dichiara di ritirare la Nota da lui presentata nell'adunanza precedente; e l'Accademia prende atto del desiderio da lui espresso.

Il Socio Somigliana fa dono alla Biblioteca Accademica del volume VII del " Bollettino del Comitato Glaciologico italiano „ e discorre brevemente dei singoli lavori che vi sono compresi; vale a dire: la Commemorazione di Olinto Marinelli; Le variazioni periodiche dei Ghiacciai italiani di Umberto Monterin; I Ghiacciai delle Alpi marittime di A. Roccati; e osservazioni varie dovute a Giuseppe Vangeroni e Manfredo Vanni. — Il Socio Somigliana ricorda infine la Nota del Socio Sacco compresa nel volume e prega l'Autore di voler render conto dei risultati ottenuti.

La Nota del Socio Sacco dal titolo *Il glacialismo nel Gruppo del Monviso*, è corredata da una grande Carta glaciologica, alla Scala da 1 a 25.000. Egli accenna brevemente come nella prima metà dell'èra quaternaria il glacialismo in detto gruppo sia stato bensì grandioso, ma non già in forma di lunghe fiumane glaciali, come nella maggior parte delle Vallate alpine, invece piuttosto a foggia di enormi ventagli, estendentisi e scendenti sui fianchi di tutto il gruppo, mancandovi quelli ampi bacini che altrove servirono ad alimentare lunghi Ghiacciai.

Il Socio Panetti, nel nome dell'ing. Carlo Ferrari, presenta una Nota dal titolo: *Sulla rotazione non uniforme di un cilindro illimitato in un fluido viscoso indefinito.*

La Nota tratta del moto eccitato in un fluido indefinito, viscoso da un cilindro a sezione retta circolare pure indefinito animato di moto rotatorio la cui superficie sia bagnata dal fluido in modo di escludere scorrimenti relativi.

I risultati della ricerca che il Ferrari si propone di continuare esaminando il caso di un cilindro rotante di lunghezza finita, danno modo di rendersi conto della legge colla quale il movimento si comunica al fluido all'inizio del tempo fermo.

Le note relazioni fra il fenomeno del campo indotto da un vertice rettilineo indefinito, e quello di un'ala portante, nonchè le applicazioni dei cilindri rotanti in sostituzione delle vele per sfruttare nella navigazione l'energia del vento rendono importanti le ricerche sull'indirizzo della Nota presentata.

Il Socio Pochettino presenta quindi una Nota del prof. Filadelfo Insolera dal titolo: *Sul Calcolo della probabilità annuale di morte in gruppi aperti di popolazione.* La Nota viene accolta per la pubblicazione negli *Atti.*

LETTURE

Sulla rotazione non uniforme di un cilindro illimitato in un fluido viscoso indefinito.

Nota dell'Ing. CARLO FERRARI
presentata dal Socio nazionale residente Modesto Panetti

1. — Un cilindro di lunghezza illimitata e raggio R, inizialmente in quiete, ruoti attorno al proprio asse con velocità angolare definita da una funzione $f(t)$ nota del tempo; nel presente studio mi propongo di determinare il campo di velocità che tale rotazione eccita nel fluido circostante supponendo in un primo tempo aderenza perfetta tra la superficie del corpo ed il fluido stesso ad essa adiacente e modificando poi la soluzione trovata in modo da tener conto di eventuali scorrimenti al contatto del corpo rotante. A tale scopo integro le equazioni generali del moto piano viscoso e ricerco un integrale particolare atto a soddisfare le condizioni limiti. Supposto che a partire da un istante determinato $t = a$ la velocità periferica del cilindro rimanga costante $= k$, ottengo per $t = \infty$ la nota legge iperbolica di variazione della velocità colla distanza r dall'asse $v = \frac{kR}{r}$ corrispondente al campo di velocità di un vortice rettilineo indefinito. Le formole trovate permettono inoltre di studiare come varî nel tempo la vorticità, che in particolare risulta nulla per $t = \infty$.

2. — Assumo l'asse z coincidente coll'asse del cilindro; gli assi x e y in un piano perpendicolare a z e ortogonali fra di loro. Il moto essendo piano le equazioni generali risultano:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

dove $u =$ componente della velocità nella direzione dell'asse x,
$v =$ componente della velocità nella direzione dell'asse y,
$p =$ pressione,
$\rho =$ densità (costante),
$\nu =$ viscosità cinematica.

Indicando con Ψ la funzione di corrente si ha, come è noto,

$$(2)\qquad u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

con che la terza delle (1) rimane identicamente soddisfatta. Sostituendo le (2) in (1), derivando la prima delle (1) rispetto ad y, la seconda rispetto ad x e sottraendo si ottiene

$$(3)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\Delta\Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\Delta\Psi - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\Delta\Psi = \nu\Delta\Delta\Psi.$$

Data la simmetria del fenomeno rispetto all'asse z, Ψ risulta funzione solo di r e t, essendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; e perciò $\Psi = \Psi(r, t)$; se ne deduce

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial r}\frac{x}{r}; \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial r}\frac{y}{r}; \qquad \Delta\Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta\Psi = \frac{\partial^3 \Psi}{\partial r^3}\frac{x}{r} + \frac{x}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial r}\frac{x}{r^3};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Delta\Psi = \frac{\partial^3 \Psi}{\partial r^3}\frac{y}{r} + \frac{y}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial r}\frac{y}{r^3}.$$

che sostituite in (3) la trasformano in

$$(4)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\Delta\Psi = \nu\Delta\Delta\Psi \quad (*).$$

(*) L'equazione (4), alla cui soluzione è stato ricondotto il problema, è l'equazione caratteristica dei moti viscosi lenti; essa è stata in particolar

3. — Si ponga $\varphi = \Delta\Psi$ (4 bis); si ha $\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \Delta\varphi$ (5).

Il significato fisico della $\varphi = \Delta\Psi$ risulta qui ben definito: la φ non rappresenta altro che il modulo del vettore rot. $\boldsymbol{v}$, indicando con v il vettore velocità. Infatti si ha

$$\text{rot.}\, \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = \Delta\Psi \,.\, \boldsymbol{k}$$

dove $\boldsymbol{k}$ rappresenta un vettore unitario che ha la direzione dell'asse del cilindro.

La (5) si integra nel modo solito ponendo $\varphi = \Phi_0(r)\, e^{-\frac{h^2}{\nu}t}$, che sostituita in (5) dà

$$-\frac{h^2}{\nu^2}\Phi_0 = \frac{d^2\Phi_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Phi_0}{dr},$$

da cui

$$\Phi_0 = A J_0\left(\frac{h}{\sqrt{\nu}}r\right) + B Y_0\left(\frac{h}{\sqrt{\nu}}r\right)$$

essendo A e B due costanti arbitrarie

$$J_0 = \text{funzione cilindrica di Bessel} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{h}{\sqrt{\nu}} r\cos\alpha\right) d\alpha$$

$$Y_0 = \text{funzione cilindrica di Neuman} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{h}{\sqrt{\nu}} r \,\text{sen}^2\alpha\right) \cos\left(\frac{h}{\sqrt{\nu}} r\cos\alpha\right) d\alpha.$$

Ad ogni valore di h corrisponde un integrale particolare di (5); se con F si indica l'integrale generale di (5) si ottiene per Ψ dalla (4 bis)

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) = F$$

modo trattata dal prof. Picciati (*Sul moto di un cilindro indefinito in un liquido viscoso*, " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ", vol. XVI, 2° sem. 1907) e dal prof. Boggio (*Sul moto stazionario lento di un liquido vischioso*, " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ", vol. XIX. 2° sem. 1910; *Sul moto stazionario lento di una sfera in un liquido viscoso*, " Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ", tomo XXX, 1910.

e quindi

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{r} \int_R^r r F d r + \frac{C(t)}{r}$$

essendo $C(t)$ una funzione arbitraria del tempo. e finalmente

$$\Psi(r, t) = \int_R^r \frac{1}{r} \int_R^r r F d r + \int_R^r \frac{C(t)}{r} d r + D. \tag{6}$$

4. — Il problema è così condotto alla determinazione di una funzione Ψ, la cui forma è data dalla (6), e che deve soddisfare alle condizioni ai limiti. Queste, se si suppone aderenza perfetta tra il corpo rotante ed il fluido adiacente, sono evidentemente

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)_{\substack{t=0 \\ r \text{ qualunque}}} = 0\,; \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)_{\substack{r=R \\ t \text{ qualunque}}} = R f(t) \ [f(t) \text{ funzione nota del tempo}]; \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)_{\substack{r=x \\ t \text{ qualunque}}} = 0\,. \tag{7}$$

La prima delle (7) dice che all'inizio il moto è nullo dovunque. La seconda è conseguenza dell'ipotesi fatta di completa aderenza. Per la terza il fluido all'infinito è costantemente in quiete.

Dalla seconda delle (7) si deduce immediatamente

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)_{\substack{r=R \\ t \text{ qual.}}} = \frac{1}{R} \int_R^R r F d r + \frac{C(t)}{R} = R f(t)$$

e quindi

$$C(t) = R^2 f(t). \tag{8}$$

Dalla prima, ponendo

$$F_i = \Sigma A J_0\left(\frac{h}{\sqrt{\nu}} r\right) e^{-\frac{h^2}{\nu} t} + e^{-\frac{h_1^2}{\nu} t}\, Y_0\left(\frac{h_1}{\sqrt{\nu}} r\right),$$

dove con h_1 si indica un particolare valore del parametro h, e con F_i un particolare integrale di (5), si ricava

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)_{\substack{t=0\\ r\ \text{qual.}}} = \frac{1}{r}\int_R^r\left[\Sigma A J_0\left(\frac{h}{\sqrt{\nu}}r\right) + Y_0\left(\frac{h_1}{\sqrt{\nu}}r\right)\right] r\,dr + \frac{R^2 f(0)}{r} =$$

$$= \frac{1}{r}\int_R^r\left[\Sigma A J_0\left(\frac{h}{\sqrt{\nu}}r\right) + Y_0\left(\frac{h_1}{\sqrt{\nu}}r\right)\right] r\,dr = 0$$

poichè $f(0) = 0$ essendosi scelta l'origine del tempo all'inizio del moto; si deduce pertanto

$$\Sigma A J_0\left(\frac{h}{\sqrt{\nu}}r\right) = -\,Y_0\left(\frac{h_1}{\sqrt{\nu}}r\right).$$

Moltiplicando entrambi i membri per $r J_0\left(\frac{h_1}{\sqrt{\nu}}r\right)$ ed integrando da 0 ad R, poichè $\int_0^R r J_0\left(\frac{h}{\sqrt{\nu}}r\right) J_0\left(\frac{h_1}{\sqrt{\nu}}r\right) dr = 0$ se h ed h_1 sono due radici distinte dell'equazione caratteristica $J_0\left(\frac{h}{\sqrt{\nu}}R\right) = 0$, si ha

$$A = \frac{-\int_0^R r J_0 Y_0\,dr}{\int_0^R r J_0^2\,dr}.$$

La terza delle condizioni (7) rimane poi, come è facile verificare, identicamente soddisfatta.

5. — Ad ogni valore del parametro h_1 corrisponde un particolare integrale che soddisfa alle equazioni generali del moto ed alle condizioni ai limiti; potremo pertanto porre l'integrale generale di (5) sotto la forma $F = \Sigma F_i$ essendo la sommatoria estesa a tutti i valori di h che soddisfano alla equazione $J_0\left(\frac{h}{\sqrt{\nu}}R\right) = 0$, e la F_i determinata come si è visto nel numero precedente.

Se si suppone che a partire dall'istante $t = a$ la rotazione del cilindro si compia con velocità angolare ω costante, si ricava dalle formule precedenti che per $t = \infty$, $\left(\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)_{t=\infty} = \frac{\omega R^2}{r} = \frac{\kappa R}{r}$ essendo $\kappa = \omega R$; si ritrova cioè la funzione di corrente del campo di velocità di un vortice rettilineo indefinito, supposto il moto permanente.

6. — È facile mostrare che $\int_0^R r J_0(\alpha r) J_0(\beta r)\, dr = 0$, se α e β sono due radici distinte dell'equazione $J_0(\alpha R) = 0$. Si ha infatti, indicando con F_1 e F_2 due soluzioni dell'equazione $\frac{d^2 F}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dF}{dz} + F = 0$,

$$\frac{d^2 F_1}{dz_1^2} + \frac{1}{z_1}\frac{dF_1}{dz_1} + F_1 = 0 \quad \text{essendo } z_1 = \alpha r$$

$$\frac{d^2 F_2}{dz_2^2} + \frac{1}{z_2}\frac{dF_2}{dz_2} + F_2 = 0 \quad \text{essendo } z_2 = \beta r$$

che si possono anche scrivere

$$\frac{d^2 F_1}{dr^2}\frac{dr^2}{dz_1^2} + \frac{1}{\alpha r}\frac{dr}{dz_1}\frac{dF_1}{dr} + F_1 = 0$$

$$\frac{d^2 F_1}{dr^2}\frac{dr^2}{dz_2^2} + \frac{1}{\beta r}\frac{dr}{dz_2}\frac{dF_2}{dr} + F_2 = 0$$

e quindi

$$\frac{d^2 F_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF_1}{dr} + \alpha^2 F_1 = 0$$

$$\frac{d^2 F_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF_1}{dr} + \beta^2 F_2 = 0.$$

Si moltiplichi la prima per F_2, la seconda per F_1 e si sottragga; si ha

$$F_1'' F_2 - F_2'' F_1 + \frac{1}{r}(F_2 F_1' - F_2' F_1) + (\alpha^2 - \beta^2) F_1 F_2 = 0$$

$$\frac{d}{dr}[r(F_2 F_1' - F_2' F_1)] = -(\alpha^2 - \beta^2) F_1 F_2 r$$

ed integrando da 0 ad R, tenendo presente che per $r = R$

$$F_2 = F_1 = 0 \quad \text{si ottiene} \quad \int_0^R r F_1 F_2\, dr = 0 \quad \text{perchè} \quad \alpha \neq \beta.$$

7. — Qualora non si faccia l'ipotesi dell'aderenza perfetta la soluzione del problema risulta modificata nel modo seguente.

Sia χ il coefficiente di aderenza tra fluido e cilindro; l'equilibrio del prismetto elementare di fluido, di superficie dS e di

altezza dr, adiacente alla superficie del corpo rotante, richiede sia soddisfatta l'equazione

$$\chi\, dS\,(V - v_0) = -\,\mu\, dS\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r=R}$$

potendosi trascurare le forze di volume (infinitesimi di terzo ordine) rispetto alle forze tangenziali (infinitesimi di secondo ordine), ed essendo

$v_0 =$ velocità del fluido a contatto del corpo

$V =$ velocità periferica del corpo rotante $= Rf(t)$

$v = \dfrac{\partial \Psi}{\partial r} =$ velocità del fluido

$\mu = \rho\nu =$ viscosità del fluido.

Si deduce

$$v_0 = V + \frac{\mu}{\chi}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r=R}.$$

La seconda delle (7) risulta ora

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)_{r=R} = Rf(t) + \frac{\mu}{\chi}\left[F - \frac{C(t)}{R^2}\right] = \frac{C(t)}{R}$$

t qual.

dalla quale si deduce

$$C(t) = \frac{R^2 f(t) + \dfrac{\mu}{\chi} RF}{1 + \dfrac{\mu}{\chi}\dfrac{1}{R}}$$

che si riduce per $\chi = \infty$ all'espressione precedentemente trovata. Per $t = \infty$, $F = 0$ e quindi, supposto sempre che all'istante $t = a$ la rotazione del cilindro sia uniforme con velocità angolare ω, costante, risulta

$$V = R\omega\,, \qquad C = \frac{R^2\omega}{1 + \dfrac{\mu}{\chi}\dfrac{1}{R}} = \frac{R^2 V}{R + \dfrac{\mu}{\chi}}\,,$$

e la legge di variazione della velocità colla distanza r dall'asse

(9) $$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)_{t=\infty} = \frac{C}{r} = \frac{R^2 V}{\left(R + \dfrac{\mu}{\chi}\right) r}\,.$$

È degno di nota il fatto che esperienze eseguite dall'ingegnere Pasqualini nel Laboratorio d'Aeronautica del R. Politecnico di Torino sembrano confermare la legge definita dalla (9): il diagramma delle velocità in funzione del raggio r determinato con pneumometro di Krell in corrispondenza della sezione mediana di un cilindro rotante con dischi terminali, così da realizzare per quanto possibile il cilindro indefinito, ha un andamento sensibilmente iperbolico e rivela forti scorrimenti al contatto. Per mezzo della (9) è quindi possibile ricavare sperimentalmente il rapporto $\frac{\mu}{\chi}$, e quindi, essendo nota la viscosità μ del fluido, il valore del coefficiente χ.

Sul calcolo della probabilità annuale di morte in gruppi aperti di popolazione.

Nota del Prof. FILADELFO INSOLERA (Torino)
presentata dal Socio naz. resid. A. Pochettino

SOMMARIO: 1. Introduzione — 2. Critica delle formole di Wittstein, di Zeuner e di Favero — 3. Formola generalizzata di Heym — 4. Nuova formola e suo confronto con le precedenti — 5. Esemplificazioni.

1. — I recenti progressi della Statistica matematica orientano sempre più decisamente verso lo abbandono, come regola, del criterio della stazionarietà dei gruppi di popolazione, sui quali sia da costruire una tavola di sopravvivenza. Di qui la necessità di una sistematica estensione ai gruppi aperti di quanto è stato finora stabilito per i gruppi chiusi e di una revisione coordinatrice e generalizzatrice di quanto sporadicamente è stato già stabilito per i gruppi aperti, in casi particolari.

In questo scritto si procede, appunto, a una disamina generale dei criteri e delle ipotesi avanzate, specialmente dalla Scuola attuariale tedesca, per il calcolo della probabilità annuale di morte in gruppi demografici aperti, e si addiviene alla determinazione di formole generali e particolari che ci sembrano non prive di teorico e pratico interesse.

2. — La espressione generale del tasso annuo di mortalità per un gruppo aperto, dipende, com'è noto, dalla risoluzione di un'equazione integrale, della quale abbiamo già avuto occasione di occuparci altrove [1]. Ma nella pratica delle applicazioni si

[1] *Su particolari equazioni di Volterra e loro applicazione finanziaria e demografica*, " Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere ", t. 60, Milano, 1927.

suole, invece, premettere particolari ipotesi sulle funzioni che intervengono in quella equazione, per risolverne poi, con sistemi di approssimazione, le forme ridotte, più o meno semplici, che per tal modo vi si sostituiscono. Noi nel seguito procederemo in senso inverso. Intanto, rileviamo che tutte queste particolari forme hanno a comune la ipotesi che le morti si distribuiscano in maniera uniforme nell'unità di tempo, dall'età x ad $x+1$; ond'è che se l_x sono i viventi al principio dell'intervallo, d_x i decessi nell'intervallo, q_x la probabilità annua di morte, $r(t)\,dt$ l'incremento netto o residuale (differenza fra gli immigrati nel gruppo e gli emigrati dal medesimo) nell'intervallino da t a $t+dt$ ed è $q(t, x+1)$ la probabilità di morte nell'intervallo $(t, x+1)$, ne discende, com'è chiaro:

$$d_x = l_x\, q_x + \int_x^{x+1} r(t)\, q(t, x+1)\, dt. \tag{1}$$

Alla (1) si ricongiungono cinque espressioni approssimate della q_x, di cui due dovute a Wittstein [2], una ad Heym [3], una a Zeuner [4] e una a Favero [5], per non dir di altre. I primi due autori ammettono l'uniformità della distribuzione anche per l'incremento residuale del gruppo; sicchè, per essi, dalla (1) ci si riduce, essendo $r(t) = r_x$ costante, a

$$d_x = l_x\, q_x + r_x \int_x^{x+1} q(t, x+1)\, dt; \tag{1'}$$

e la diversità delle espressioni cui pervengono è dovuta, in definitiva, solo a diversa valutazione approssimata dell'integrale a secondo membro della (1'), cioè ad ulteriori ipotesi implicite od esplicite nella definizione analitica di $q(t, x+1)$.

Gli altri autori specificano, oltre a delle ipotesi per la $q(t, x+1)$, anche particolari ipotesi per la $r(t)$, che si rifiutano di considerar costante nell'intervallo unitario.

---

[2] *Mathematische Statistik*, Hannover, 1867.

[3] *Masius' Rundschau der Versicherung*, v. III, 1853, p. 335.

[4] *Abhandlungen aus der Mathematischen Statistik*, Leipzig, 1869, p. 97 e seg.

[5] *Studio comparativo sopra alcune formole proposte per la determinazione della mortalità nel caso di emigrazione*, "Annali di Statistica", s. III, v. 5, Roma, 1883.

Ma giova preliminarmente domandarsi: *a*) Fino a qual punto le ipotesi che si possano avanzare per la definizione analitica di $r(t)$ sono compatibili con la premessa ed ammessa uniformità di distribuzione delle morti? *b*) Fino a qual punto le ipotesi avanzate dai vari autori per la definizione analitica della $q(t, x+1)$ sono compatibili e con la uniforme distribuzione delle morti e con la uniforme o non uniforme distribuzione ammessa per l'incremento residuale del gruppo?

È fuor di dubbio che non sia lecito stabilire delle ipotesi separatamente e indipendentemente le une dalle altre, sia per la $d(t)$, sia per la $r(t)$, sia per la $q(t, x+1)$: fra di esse v'ha una interdipendenza che non può essere trascurata, tanto più che, una volta ammesse delle ipotesi per due di esse, la terza risulta compiutamente definita [6]. Ma sembra che di ciò i precedenti autori non si siano gran che preoccupati.

Per convincersene e risponder così alle due domande che ci siamo poste, cominciamo dall'osservare che nella (1'), dovendo essa valere per la ipotesi di uniforme distribuzione tanto delle morti quanto dell'incremento residuale del gruppo, è legittimo porre $t = x + 1/2$, perchè la uniforme distribuzione equivale ad ammettere che tutte le entrate e le uscite nel gruppo (morti comprese) abbiano luogo nel giusto mezzo dell'intervallo. La (1'), pertanto, va correttamente sostituita dalla seguente:

$$d_x = l_x q_x + r_x q(x + {}^1/_2, x+1); \tag{1''}$$

e soltanto su questa, se mai, sono operabili le eventuali ulteriori ipotesi relative alla $q(t, x+1)$.

Invece, il Wittstein, nelle identiche condizioni, aggiunge: una volta, la posizione

$$q(t, x+1) = 1 - (1 - q_x)^{x+1-t}, \tag{2}$$

---

[6] Giova notare a tal proposito che i metodi delle durate esatte (*exact duration*), delle durate medie (*mean duration*) e delle durate più vicine (*nearest duration*), propri della Scuola attuariale inglese (Cfr. T. G. Ackland, *An investigation of some methods for deducing the rates of mortality*, "Journal of the Institute of Actuaries", London, 1896-97), discendono da ipotesi particolari su $r(t)$ e $q(t, x+1)$; quest'ultima anzi, implicitamente o esplicitamente, vien sempre definita da $q(t, x+1) = q_x(x+1-t)$, come bene è

e con essa alla (1') deduce una prima espressione per la q_x; una seconda volta, preferisce la ipotesi definita della relazione

$$q(t, x+1) = \frac{(x+1-t)\,q_x}{1-(t-x)\,q_x}, \tag{3}$$

e con essa, sempre dalla (1'), desume una seconda espressione per la q_x. Ove il Wittstein avesse, prima, posto $t = x + 1/2$ sia nella (2) sia nella (3) e si fosse avvalso, quindi, della (1''), sarebbe pervenuto a risultati diversi. Nel primo caso, risulta, invero,

$$d_x = l_x\, q_x + r_x\,[1 - (1 - q_x)^{1/2}]; \tag{4}$$

e nel secondo

$$d_x = l_x\, q_x + \frac{r_x}{2}\,\frac{q_x}{1 - q_x/2}; \tag{5}$$

nessuna delle quali ovviamente, coincide con le formole proposte dal Wittstein ([7]). La (4) è ciò a cui si riduce nelle attuali condizioni, una formola generale già da noi proposta, attraverso un riferimento alla nota ipotesi Gompertz-Makeham ([8]), e la (5) riproduce, poi, in sostanza la formola dello Zeuner, da questi per altro ottenuta aggiungendo alla posizione (3) una ulteriore ipotesi per la $r(t)$ — non ritenuta costante — espressa dalla relazione

$$r(t) = r_x\,\frac{1-(t-x)\,q_x}{1-q_x/2};$$

ipotesi che, evidentemente, si rivela, così, perfettamente inutile ed illusoria ([9]).

A questa critica e alle sue conclusioni, non sfugge, per ragioni del tutto analoghe, sulle quali non riteniamo di insistere, la formola del Favero, quantunque essa, per altre ragioni, già altra volta esposte, sia da considerare della (5) notevolmente migliore ([10]).

---

stato messo in evidenza da I. Messina (*Le probabilità parziali nella matematica attuariale,* " Boll. del Credito e della Previdenza ", Roma, 1915).

([7]) Cfr. F. Insolera, *Corso di Matematica finanziaria*, Torino, 1923, p. 35, form. (27) e (28).

([8]) Cfr. F. Insolera, *Corso di Matem. finanz.*, cit., pag. 34, form. (26).

([9]) Cfr. F. Insolera, *Corso* ecc. cit., p. 36, form. (29).

([10]) Cfr. Insolera, *Corso*, p. 41-42.

3. — Breve discorso a parte merita il risultato di Heym. Ove si ponga l'origine dei tempi in corrispondenza all'età precisa x e si consideri l'intervallo $0z$ del tempo t, è agevole riconoscere che, indicando $d(t)\,dt$ i decessi nel tempuscolo da t a $t+dt$, invece della (1), vada presa in considerazione la seguente relazione:

$$\int_0 d(t)\,dt = l_0\, q(0, z) + \int_0^z r(t)\, q(t, z)\, dt \tag{6}$$

la quale, quando tutti gli elementi che in essa compariscono siano noti, tranne q, risolve il problema che ci occupa con riferimento a un intervallo arbitrario $0z$ $(0 < z \leq 1)$. Per la risoluzione di questa equazione integrale, poniamo

$$D_z = \frac{1}{l_0}\int_0^z d(t)\,dt \qquad R_z = \frac{1}{l_0}\int_0^z r(t)\,dt \tag{7}$$

e, ove $\mu(t)$ indichi il tasso istantaneo di mortalità all'età $x+t$, si ponga altresì

$$\varphi(z) = e^{\int_0^z \mu(t)\,dt}. \tag{8}$$

La (6) assume allora la forma

$$(1 + R_z - D_z)\,\varphi(z) - 1 = \int_0^z R_t'\,\varphi(t)\,dt. \tag{6'}$$

Una soluzione di questa equazione si ottiene, com'è noto, essendo il nucleo funzione di sola t ed essendo nullo il primo membro per $z = 0$, procedendo per derivazione della (6') e successiva integrazione dell'equazione differenziale risultante. Così operando, si ha anzitutto

$$(1 + R_t - D_t)\,\varphi'(t) = D_t'\,\varphi(t),$$

e poi

$$\varphi(z) = e^{\int_0^z \frac{D_t'\,dt}{1 + R_t - D_t}}. \tag{9}$$

Ma è, per la (8),

$$q(0, z) = \frac{\varphi(z) - 1}{\varphi(z)}, \tag{10}$$

perciò ne discende

$$q(0, z) = 1 - e^{-\int_0^z \frac{D_t' \, dt}{1 + R_t - D_t}} \tag{11}$$

Questo risultato è di ampia portata: per esso nessuna condizione è stata posta, all'infuori della integrabilità delle funzioni R e D.

Se, in particolare, supponiamo poi tali funzioni lineari in t, poniamo cioè

$$D_t = d_0 \, t/l_0 \qquad R_t = r_0 \, t/l_0, \tag{12}$$

con che ovviamente, si ammette la uniforme distribuzione dei morti e dell'incremento residuale del gruppo, ci si riduce da (11) a

$$q(0, z) = 1 - [1 - (d_0 - r_0) \, z/l_0]^{d_0/(d_0 - r_0)}, \tag{13}$$

che, per $z = 1$, è la nota formola di Heym.

Questo risultato dimostra che delle varie espressioni particolari proposte per la q_x e delle quali s'è rapidamente discorso prima, la sola corretta, la sola che rappresenti un risultato in piena armonia con le premesse ipotesi è questa di Heym, che discende come caso particolare dalle (11) e (13).

4. — Per venire ad una pratica conclusione, non possiamo poi non notare che, comunque, nessuna delle formole proposte consente uno spedito calcolo dei valori della q_x, al variare della x. Gli stessi Autori, dei quali ci siamo già occupati, hanno, appunto nel desiderio di raggiungere tale intento, suggerito nuove espressioni approssimate, dedotte da quelle di cui s'è discorso nei precedenti paragrafi, procedendo a degli sviluppi in serie dei logaritmi o degli esponenziali, che in esse compariscono, e trascurando i termini con potenze superiori alla prima o, in qualche caso, alla seconda. Non ci sarà, peraltro, difficile chiarire che queste espressioni di prima approssimazione, ai difetti ed inconvenienti di quelle da cui provengono, altri ne aggiungono.

Prima, per altro, giova porre in rilievo, a mo' di sintesi delle considerazioni finora svolte, la opportunità e la utilità della ricerca di una espressione, per la q_x, la quale risponda ai seguenti requisiti: *a*) In analogia con la formola di Heym e

a differenza di quelle di Wittstein e di Zeuner, non risulti da caotiche interferenze di ipotesi o inutili o contradditorie; *b*) Si presti alla materialità dei calcoli numerici con facilità e speditezza non inferiore a quelle offerte dalle formole preesistenti; *c*) Conduca a risultati di maggiore approssimazione che non le note formole.

Questo risultato crediamo di aver raggiunto riprendendo della equazione (6′) la soluzione già da noi altrove stabilita [11], e che è la seguente

$$(14) \qquad \varphi(z) = \frac{1}{1 + R_z - D_z} + \int_0^z \frac{R_t'}{(1 + R_z - D_z)(1 + R_t - D_t)}\, dt\,,$$

dalla quale si desumono le soluzioni aritmetiche particolari con l'attribuire alle funzioni D e R espressioni analitiche concrete.

Ci limitiamo a ritornare sulle posizioni (12), che per maggiore semplicità scriviamo così:

$$(12') \qquad D_t = \Delta_0 t\,, \qquad R_t = \rho_0 t\,,$$

essendo, ovviamente, Δ_0 e ρ_0 costanti. La (14) diviene allora

$$(15) \quad \varphi(z) = \frac{1}{1 - (\Delta_0 - \rho_0)z} + \int_0^z \frac{\rho_0\, dt}{(1 - \Delta_0 z + \rho_0 t)\,[1 - (\Delta_0 - \rho_0)\, t]}\,;$$

e, ove si indichi con I l'integrale a secondo membro della (15), si ha con facile calcolo

$$I = \frac{1}{\rho_0 - \Delta_0} \int_0^z \frac{dt}{\left(t + \frac{1 - \Delta_0 z}{\rho_0}\right)\left(t + \frac{1}{\rho_0 - \Delta_0}\right)} = \frac{\rho_0 \log(1 - \Delta_0 z)}{\Delta_0\,[(\Delta_0 - \rho_0)\, z - 1]}\,.$$

Sostituendo, allora, nella (15) si ottiene, in definitiva

$$(16) \qquad \varphi(z) = \frac{\Delta_0 - \rho_0 \log(1 - \Delta_0 z)}{\Delta_0\,[1 - (\Delta_0 - \rho_0)\, z]}\,.$$

Dalla (10), per la (16), discende poi

$$(17) \qquad q(0, z) = 1 - \frac{\Delta_0\,[1 - (\Delta_0 - \rho_0)\, z]}{\Delta_0 - \rho_0 \log(1 - \Delta_0 z)}\,.$$

---

[11] Vedi nota [1].

Infine, quando si ponga nella (17) $z = 1$ e si sostituisca l'indice 0 con l'età x che vi corrisponde, si perviene alla formola finale

$$(18) \qquad q_x = 1 - \Delta_x \frac{1 + \rho_x - \Delta_x}{\Delta_x - \rho_x \log(1 - \Delta_x)} .$$

Dobbiamo, per altro, anche qui notare che quando si abbia da fare, come spesso è il caso nella costruzione delle tavole di mortalità, con molti valori della x, la ricerca di logaritmo rappresenta una non indifferente complicazione. Però, in quest'ultima formola comparisce soltanto il log $(1 - \Delta_x)$, con Δ_x quantità essenzialmente positiva e minore dell'unità, sempre, e pochissimo diversa da zero, per grande parte della vita: sicchè, sviluppando in serie e trascurando i termini contenenti potenze di Δ_x superiori alla seconda, numericamente non apprezzabili, dalla formola (18), ogni riduzione fatta, ci si riduce alla sua approssimata

$$(19) \qquad q_x \simeq \frac{\Delta_x (2 + \rho_x)}{2 + \rho_x (2 + \Delta_x)} .$$

valida per valori positivi o negativi di ρ_x purchè in ogni caso $\Delta_x \leq 1 + \rho_x$. La (19) soddisfa pienamente ai requisiti sotto *a*), *b*) e *c*). Infatti poggia, come la formola di Heym, sulla sola ipotesi di uniforme distribuzione delle entrate e uscite dal gruppo (morti comprese); alla diretta visione si presenta molto semplice e di facile calcolo; rappresenta una seconda approssimazione, avendo trascurato soltanto potenze di Δ_x superiori alla seconda.

In particolare, è agevole riconoscere il vantaggio della (19) sulle formole del Wittstein. Queste contengono, invero, l'incognita q_x come argomento del logaritmo che in entrambe comparisce; sicchè nello sviluppo in serie, ove si voglia evitare per per ogni x la risoluzione di un'equazione di almeno secondo grado, è necessario limitarsi in entrambe le formole alla considerazione della sola prima potenza di q_x; e allora — secondo lo stesso Wittstein riconosce — entrambe si riducono in sostanza, a una nota formola di uso comune ([12]).

([12]) Questa formola è $q_x = 2\Delta_x/(2 + \rho_x)$ ed è ottenuta, aggiungendo alle ipotesi su cui poggia la (19) del testo, anche l'altra di $q\,(x + 1/2, x + 1) =$

La formola (19) è anche particolarmente vantaggiosa in confronto delle formole dello Zeuner e di Heym. L'espressione dello Zeuner, invero, risoluta rispetto a q_x presenta un radicale contenente ρ_x: lo Zeuner sviluppa il radicale in serie e trascura le potenze superiori alla prima, cioè trascura successive potenze di ρ_x ([13]). Analogamente, l'espressione di Heym contiene un esponenziale con ρ_x sia alla base sia all'esponente: sviluppando anche qui in serie si dovranno perciò trascurare successive potenze di ρ_x ([14]). Ma questo, di dover trascurare termini in ρ_x costituisce una molto grave menda di queste formole; perchè in generale non è possibile di nulla affermare intorno alla quantità ρ_x, nè per la entità nè per il segno: epperò nulla può dirsi di sicuro sulla più o meno rapida convergenza della serie, sul senso e sulla maggiore o minore approssimazione che può venirne per il fatto dei termini trascurati. Tali inconvenienti sono, invece, completamente superati dalla (19), la quale discende dallo sviluppo in serie di una funzione logaritmica di cui l'argomento, Δ_x, è sempre positivo e piccolissimo per gran parte dell'esistenza, sì che la convergenza è solitamente molto rapida e le potenze superiori alla seconda numericamente trascurabili.

5. — Un'analisi comparativa fra le varie formole approssimate di cui s'è detto nel precedente paragrafo, porta agevolmente alle seguenti conclusioni:

$q_x/2$, ipotesi che aggiunge una non necessaria grossolanità; in quanto, quando non foss'altro, in generale nella seconda metà di un intervallo di tempo la mortalità, a parità di ogni altra condizione, è da giudicarsi maggiore che non nella prima. Cfr. F. Insolera, *Corso*, p. 39.

([13]) La formola approssimata dello Zeuner risulta in tali condizioni

$$q_x \simeq \Delta_x (2 - \Delta_x) : (2 + \rho_x - \Delta_x),$$

e quella di Favero

$$q_x \simeq \Delta_x (2 + \rho_x - \Delta_x) : (2 + 2\rho_x - \Delta_x).$$

Cfr. F. Insolera, *Corso*, p. 41, form. (35) e p. 42, form. (36), rispettivamente.

([14]) La formola approssimata di Heym è in tali condizioni

$$q_x \simeq \Delta_x (2 - \rho_x) : 2.$$

Questa formola e quella di uso comune, ricordata a nota ([12]), sono molto semplici, ma le più grossolane, fra quelle esaminate in questo studio, e non sempre sono da consigliare, come chiariscono gli esempi del n. 5.

Se $\rho_x < 0$, le formole di Heym, di Zeuner, di Favero e di uso comune sono sistematicamente in difetto rispetto alla (19);

Se $\rho_x > 0$, le formole di Heym, di Zeuner e di uso comune sono sistematicamente in eccesso ovvero in difetto rispetto alla (19), secondo che $\rho_x \lesseqgtr \Delta_x$ rispettivamente; quella di Favero lo è sempre in eccesso.

Indicando con q_h, q_z, q_f, q_1 rispettivamente, le probabilità annuali di morte dedotte dalle formole approssimate di Heym, di Zeuner, di Favero e di uso comune e con q quella ricavata dalla (19), diamo una verifica sperimentale dei risultati cui siamo pervenuti in questo scritto, attraverso tre esemplificazioni numeriche.

1° Su 10000 viventi di età x nell'unità di tempo si constata una diminuzione di 150 persone, per morte, e di altre 1200, per eccedenza di emigrati su immigrati. Si domanda la probabilità annuale di morte.

È in tal caso

$$\Delta_x = 0{,}015 \qquad \text{e} \qquad \rho_x = -0.12\,,$$

sicchè dalle formole ricordate si ottiene

$$q_h = 0{,}015900\,; \qquad q_z = 0{,}015966\,; \qquad q_f = 0{,}016032\,;$$
$$q_1 = 0{,}015957\,; \qquad q = 0{,}016039.$$

2° Su 10000 viventi di età x, nell'unità di tempo si verifica un aumento di 500 persone, per eccedenza di immigrati su emigrati, e una diminuzione di 700 individui, per morte. Si calcoli la probabilità annuale di morte.

Risulta in tal caso

$$\Delta_x = 0{,}07 \qquad \text{e} \qquad \rho_x = 0{,}05\,,$$

e quindi

$$q_h = 0{,}068250\,; \qquad q_z = 0{,}068232\,; \qquad q_f = 0{,}068276\,;$$
$$q_1 = 0{,}068293\,; \qquad q = 0{,}068220.$$

3° Su 10000 viventi di età x si constata nell'unità di tempo un aumento di 2000 persone, per eccedenza di immigrati su emigrati e una diminuzione di 200 individui, per morte. Si calcoli la probabilità annua di morte.

È in tali ipotesi

$$\Delta_x = 0{,}02 \qquad \text{e} \qquad \rho_x = 0{,}20\,,$$

epperò

$$q_h = 0{,}018000\,; \qquad q_z = 0{,}018165\,; \qquad q_f = 0{,}018319\,;$$
$$q_1 = 0{,}018182\,; \qquad q = 0{,}018303.$$

È agevole constatare la sistematica grossolanità di approssimazione di q_h e di q_1, le quali presentano sempre ampi scarti rispetto alla q, in un senso o nell'opposto a seconda del segno della ρ_x.

Torino, R. Istituto Superiore di Scienze Economiche,
aprile 1927.

L'Accademico Segretario
ORESTE MATTIROLO

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 12 Giugno 1927

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. C. F. PARONA
VICEPRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: PEANO, GRASSI, SOMIGLIANA, PANETTI, POCHETTINO e il Segretario MATTIROLO.

Scusano l'assenza i Soci: SACCO, REPOSSI, D'OVIDIO e il Presidente Senatore RUFFINI.

Il Segretario legge il verbale dell'adunanza precedente, che risulta approvato senza osservazioni.

Il Presidente comunica un telegramma del Podestà di Teramo che partecipa all'Accademia la morte avvenuta in Merate (Como) del Socio corrispondente Vincenzo CERULLI, e lo commemora, ricordandone le benemerenze scientifiche e le generose liberalità che egli diresse a creare e a dotare di istrumenti e di edificii un Osservatorio astronomico nella sua città.

Presenta quindi una Nota del Prof. FRANZ ED. SUESS, di Vienna dal titolo: *Begriff und Bedeutung der Intrusionstektonik* e la illustra brevemente.

Il Segretario MATTIROLO presenta una Nota del Socio corrispondente Ing. Vittorio NOVARESE dal titolo: *L'età delle Filliti di Rè in Val Vigezzo* (*Ossola*) e ne discorre, facendone rilevare l'importanza, anche in relazione ad altri lavori dell'Autore che

trattano degli apparati morenici del Lago Maggiore e del Lago d'Orta e delle oscillazioni dei ghiacciai nelle varie glaciazioni. L'Autore si occupa dello studio delle filliti dal quale derivano notevoli osservazioni in ordine alla vegetazione svoltasi durante le glaciazioni.

Il Socio SOMIGLIANA presenta una Nota del sig. G. CASSINIS, *Sulle determinazioni dello schiacciamento terrestre mediante valori della gravità*, la quale viene accolta per gli *Atti*.

Il Vice-Presidente comunica quindi una Nota della D.[sa] Rosa ZUFFARDI-COMERCI, *Faunetta di corallari pliocenici dell'Isola di Rodi*.

LETTURE

Faunetta di corallari pliocenici dell'isola di Rodi.

Nota della D.ª ROSINA ZUFFARDI COMERCI
presentata dal Socio naz. resid. C. F. Parona

Una bella collezione di corallari raccolti a Rodi dal Dr. A. Desio, che me l'inviò in esame, offre il soggetto alla presente Nota.

Sono circa una cinquantina di esemplari, distribuiti in diciotto forme, quasi tutte semplici, tra le quali predominano i *Flabellum* pedicellati e le *Caryophylliae*.

La conservazione perfetta ed il numero degli esemplari e delle specie relativamente elevato, rendono questa raccolta particolarmente interessante e preziosa, tanto più in considerazione che finora lo studio dei corallari di Rodi è limitato al breve studio dello Jüssen, nel quale sono considerate nove specie soltanto (1), sette delle quali confermate dal presente esame. La raccolta del Dr. Desio trova ottimi elementi di comparazione con la fauna coralligera del Pliocene del Piemonte e della Liguria (2) e con quelle sincrone sicula (3) e parmense (4): le quali faune, derivanti evidentemente da quelle del Miocene (5)

(1) Jüssen E., *Pliocäne Korallen v. Rhodus.* " Sitzung. der Akad. d. Wissensch. „, Wien, Bd. 99, vol. I. 1890.

(2) Osasco E., *Corallari pliocenici del Piemonte e Liguria.* " Atti R. Acc. Sc. Torino „, vol. XXXI, 1895.

(3) Seguenza G., *Disquisiz. paleont. intorno ai Corall. foss. dei terr. terz. del distretto di Messina.* " Mem. R. Acc. Sc. Torino „, serie II, tomo XXI, 1865.

(4) Simonelli V., *Antozoi neogenici del Museo parmense.* " Palaeont. italica „, vol. II, Pisa, 1896.

(5) Michelotti G., *Descript. des foss. des terr. mioc. de l'Italie septentr.* " Soc. Holl. des Sc. „, Leide, 1847; *Spec. Zooph. diluv.*, 1838; *Étude sur le*

— tipiche quelle della Collina di Torino e dei livelli sincroni austro-ungarici — ne differiscono tuttavia, perchè esse sono pressochè esclusivamente formate da corallari semplici, mentre nei depositi miocenici prevalgono le associazioni di forme coloniali. Si può infatti ritenere che durante il Miocene siano prevalse le condizioni ambienti, di vita e di batimetria, ancora favorevoli allo sviluppo delle forme coloniali — per quanto non esclusivamente —, mentre nel Pliocene antico, per gli intervenuti mutamenti climatici, resa più difficile la vita alle forme coloniali del noto livello delle coralline, la fauna a coralli si ridusse quasi soltanto a quella delle forme semplici del cosidetto livello batimetrico dei brachiopodi e dei coralli di mare profondo: cioè in ambiente batimetrico, di sedimentazione e di vita quale fu quello *piacenziano*, più profondo di quello *astiano*, poverissimo, se non privo, di corallari. Accennando alla prevalenza e abbondanza di coralli coloniali nel Miocene, non si esclude la loro sostituzione — in certi livelli di sedimentazione più profonda — di associazioni di coralli semplici; ed a prova di ciò è il caso di ricordare due giacimenti prossimi a Torino: quello del Monte dei Cappuccini dove, nelle marne grigie, troviamo quasi soltanto *Flabellum, Caryophylliae* e *Balanophylliae*, e quello della Val Ceppi (Superga-Pino), il noto giacimento dei grandi coralli a focaccia e ramosi.

Alla zona, si può dire con ragione, *piacenziana* corrispondono i coralli pliocenici di Rodi: ed è tra essi la *Caryophyllia clavus* Scacchi, specie vivente ancora nei fondi fangosi del Mediterraneo (Quarto dei Mille) (1); la cui vita si svolge a fianco delle Laminarie, fino a 200 m.

La scarsità, a quanto risulta, pressochè generale di corallari in colonia nel Mediterraneo pliocenico, fornisce dunque ancora un chiaro indizio della scomparsa di quelle formazioni a tipo

---

mioc. inf. de l'Italie sept. " Soc. Holl. des Sc. à Harlem ", Harlem, 1861. — Sismonda E., *Matériaux pour servir à la Paléont. du terr. tert. du Piémont*, IIme P. " Mem. R. Acc. Sc. Torino ", serie II, tomo XXV, 1871. — De Angelis G., *I corallari dei terr. terz. dell'Italia sett.* " Memorie R. Acc. Lincei ", serie V, vol. I, 1894. — Reuss A. E., *Foss. Korallen des Oesterreich.-Ung. Miocän.* " Denkschr. d. K. Akad. d. Wissensch. ", Wien, 1872.

(1) Issel R., *Biologia marina.* " Manuale Hoepli ", 1918.

di scogliere che, in precedenti età, ebbero invece, nello stesso mare, grande sviluppo ed importanza geologica, continuazione nel Paleogene e diminuzione già nel Miocene, come si disse per la Collina di Torino, e segnatamente nei livelli *tortoniani*.

I coralli che costituiscono la faunula di Rodi appartengono alle seguenti specie:

Flabellum (*Turbinolia*) ***avicula*** (Micht.). Michelotti, 1838, pag. 58, tav. III, fig. 2.

Specie ricca di esemplari e di varietà, sia nella fauna pliocenica, come in quella dei mari miocenici; già nota per il Pliocene ligure e per il Miocene piemontese (*Argille a S di Malona*).

Flabellum avicula (Micht.) var. *Royssiana* M. Edw. et Haim. — *Flabellum avicula* (Micht.) var. *siciliensis* M. Edw. et Haim. (*Estremità SE della Collina a N del Lutanio*) — *Flabellum avicula* (Micht.) var. *Michelinii* M. Edw. et Haim. (*Villaggio cretese - Argille a S di Malona - A N-NO del Castello di Lardos - Estremità SE della Collina a N del Lutanio*) — *Flabellum avicula* (Micht.) var. *parmensis* Mngh. (*Villaggio cretese*) — Simonelli, 1896, da pag. 188 — Simonelli, *Gli Antozoi plioc. del Ponticello di Savena pr. Bologna.* " Paleont. it. ", vol. I, Pisa, 1895.

Concordo col Simonelli nel ritenere le forme sopracitate come varietà che, con termini di passaggio, possono riportarsi nel ciclo della medesima specie; i diagrammi dati dall'A. e le sue considerazioni dimostrano la verità di tale asserzione. Tutte le varietà sunnominate figurano nelle argille plioceniche del parmense; la var. *Royssiana* è forma già citata per l'isola di Rodi (Jüssen, 1891); la var. *siciliensis* è propria del pliocene di Palermo; la var. *Michelinii* figura negli strati pliocenici e miocenici piemontesi. Nell'isola di Rodi quest'ultima varietà predomina sulle altre, sia per numero di esemplari, che per numero di località in cui è stata rinvenuta.

Trochocyathus crassus M. Edw. et Haim. — Reuss A. E., 1872, pag. 215, tav. 2, fig. 15 *a*, *b*, *c*.

Rara a Rodi. Abbondante nel Pliocene piemontese-ligure, come già nel Miocene piemontese — Collina di Torino — ed austro-ungarico.

(Lembo di Pliocene (sabbie argillose), isolato a N-NO del Castello di Lardos).

Trochocyathus undulatus (Michn.) — Michelin, *Icon. Zooph.*, 1841, pag. 41, tav. IX, fig. 4.

Un solo esemplare a Rodi: specie abbondante nel Miocene di S. Agata e Tortona.

(Lembo di Pliocene (sabbie argillose), isolato a N-NO del Castello di Lardos).

Caryophyllia felsinea Sim. — Simonelli, 1895, pag. 163, tav. VII, figg. 15, 16.

Campioni che hanno innegabili rapporti con la specie del Simonelli, ma che ricordano, per la forma subconica, anche la specie *C. calix* Micht. (in Sismonda, 1871, pag. 105, tav. VII, fig. 26) del Pliocene di Albenga. Le dimensioni, però, e i caratteri columellari singolarissimi sono favorevoli alla specie *felsinea*.

(Parte alta del dirupo sulla sinistra del fiume di Apano Calamona all'altezza della confluenza col fiume di Cato Calamona).

Caryophyllia Bukowskii Jüssen — Jüssen, 1891, pag. 17, fig. 3.

Un campione perfettamente identificabile, conferma la presenza nell'isola di Rodi della specie dello Jüssen.

(Lembo di Pliocene (sabbie argillose), isolato a N-NO del Castello di Lardos).

Caryophyllia clavus Scacchi — Scacchi, *Notizie intorno alle conchiglie ed ai zoofiti fossili che si trovano nelle vicinanze di Gravina in Puglia*, 1835 — Sismonda, 1846 (*Pliocene*) — Seguenza, 1865 (*Pliocene*) — Reuss, 1872, pag. 206, tav. I, fig. 1 (*Miocene*) — Jüssen, 1891, pag. 16, fig. 7

(*Pliocene*) — OSASCO, 1895, pag. 14, fig. 17 (*Pliocene*). — SIMONELLI, 1896 (*Pliocene*) — ISSEL R., 1918, pag. 369, fig. 138 (*Vivente*).

Specie di vasta distribuzione geografica nel bacino mediterraneo e di grande persistenza, passando dal Miocene fino ai nostri mari.

Per l'isola di Rodi, la specie è resa nota dallo studio dello Jüssen; l'esemplare della Coll. Desio, però, ricorda assai bene quello del Pliocene ligure figurato dall'Osasco per le minori proporzioni — che più l'avvicinano alla forma vivente — e per una più limitata gemmazione terminale.

(*Lembo di Pliocene (sabbie argillose), isolato a N-NO del Castello di Lardos).*

Caryophyllia Rhodiensis n. sp.

Due esemplari di assai piccole dimensioni mostrano caratteristiche specifiche particolari, tanto da scostarsi decisamente dalle specie note fino ad ora. L'altezza del campione completo è 5 mm., dei quali 2 appartengono alla fossa calcinale ampia e profonda; il calice è subcircolare con diametri 7 e 6 mm., mentre l'ampiezza basale è 4 mm.: il corallo ha perciò forma di vero calice largamente aprentesi. Il fossile è assai ricurvo alla base, con evidenti tracce di attacco laterale, invece che di adesione basale. La muraglia è coperta da epiteca sottile, translucida da lasciar tuttavia scorgere le coste distinte, a fini granulazioni, alternativamente grosse e piccole e leggermente crestate in prossimità dell'apertura calicinale. Setti in numero di 48, in 4 cicli: quelli dei primi due più sviluppati, sporgenti a cresta sugli altri, più spessi assai verso la parte esterna di quanto non lo siano verso l'interno; quelli del terzo ciclo giungenti fin quasi alla metà dei cicli primari e assai più sottili di questi; quelli del quarto ciclo, invece, uscenti appena dall'orlo calicinale. Tutti i setti piegano — subito dopo il bordo calicinale — ripidamente verso il centro, dove la columella fascicolare, formata da piccolo numero di fusticini — quattro o cinque — è circondata da paletti fronteggianti le terminazioni dei setti del primo ciclo.

Questa n. sp. di *Caryophyllia* è in stretti rapporti di affinità

con la *C. arcuata* M. Edw. et Haim., specialmente con gli esemplari pleistocenici di Milazzo (SEGUENZA, 1865, pag. 421, tav. III, figg. 2, 2 *a*). Le due forme, però, differiscono per le dimensioni, la forma, il carattere dell'epiteca assai più robusta nella *C. arcuata* — tanto da lasciar libere le coste solo nella parte terminale —, e le coste subeguali in questa forma anche a caratteri calcinali differenti.

(Lembo di Pliocene (sabbie argillose), isolato a N-NO del Castello di Lardos).

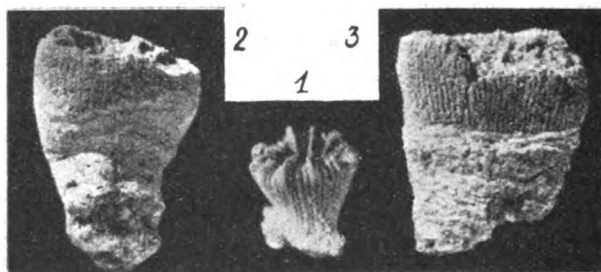



Fig. 1. — *Caryophyllia Rhodiensis* n. sp.
Fig. 2, 3. — *Balanophyllia* cfr. *seminuda* Micht.
(fig. 2 esempl. di Rodi; fig. 3 della Coll. di Torino). Tutte ingr. 2 1/2.

Ceratotrochus (Conotrochus) typus (Micht.) — SEGUENZA, 1865, pag. 529, tav. X, fig. 1 *a, b, c, d* — JÜSSEN, 1891, pag. 20, fig. 5.

Un esemplare di piccole dimensioni (altezza 10 mm., diam. calicinale 8 mm., profondità calicinale 4 mm.) si accosta assai bene a quello della fig. 1 *c* del Seguenza, quindi a dimensioni leggermente minori e a fossa calicinale più profonda dell'esemplare figurato dallo Jüssen per Rodi. Il tipo della specie proviene dal Miocene (Coll. di Torino).

(Lembo di Pliocene (sabbie argillose), isolato a N-NO del Castello di Lardos).

Cladocora caespitosa M. Edw. et Haim. — DE-ANGELIS, 1894, pag. 74 — JÜSSEN, 1891, pag. 22.

Numerosi polipieriti isolati o fascicolati, o in rami di varia lunghezza confermano la presenza a Rodi di questa specie, della

quale furono così ricchi i mari dell'Oligocene di Dego; del Miocene torinese; del Miocene e Quaternario di Sardegna, e che abbonda tuttora nei nostri mari.

Anche nel Pliocene di Rodi è largamente rappresentata.

(Villaggio cretese - Burrone SE del Monastero della Zampica - Argille nel fondo S della baietta a N di. C. Ladicò).

Cladocora Prevostana M. Edw. et Haim. — MILNE EDWARDS, 1875, *Hist. nat. des Corall.*, p. 597, tav. II e tav. D4, fig. 5 — REUSS, 1871, pag. 233, tav. XIX, fig. 7 — DE-ANGELIS, 1894, pag. 74.

Riferisco a questa specie pochi esemplari costituiti da polipieriti in brevi frammenti, riconoscibili particolarmente dalla caratteristica, frequente gemmazione e dall'ampia columella papillosa.

(Da un piccolo lembo di panchina addossato ad un affioramento di calcare ad E di Afendo).

Stephanophillia elegans Michn. — MICHELIN, 1840-47, *Icon. zooph.*, pag. 32, tav. VIII, fig. 2 — DE-ANGELIS, 1894, pag. 36 — OSASCO, 1898, pag. 14.

Esemplari ottimamente conservati e perfettamente rispondenti ai caratteri specifici; non permettono quindi confusione con l'affine *I. imperialis* Michn., sono perciò assai simili a quelli piacenziani di Zinola.

La specie è miocenica e passa al Pliocene inalterata.

(Lembo di Pliocene (sabbie argillose), isolato a N-NO del Castello di Lardos).

Balanophyllia varians Reuss — REUSS, 1871, pag. 252, tav. XV, figg. 3-5 — JÜSSEN, 1891, pag. 22.

Numerosi esemplari in buonissime condizioni per il riconoscimento anche se non completi, poichè i caratteri calicinali, così singolari, non lasciano dubbio.

La specie è rara per i mari pliocenici: manca infatti in tutto il Pliocene italiano, mentre abbonda, invece, nell'isola di Rodi.

(Dall'argilla scavata da un pozzo ad O di Manari).

Balanophyllia cfr. ***seminuda*** Micht. — In De-Angelis, 1894.

Ascrivo con incertezza a questa specie un esemplare dell'isola di Rodi, coincidente per i caratteri essenziali con alcuni campioni del Miocene della Collina torinese (Coll. Rovasenda del Museo Geologico di Torino).

L'incertezza del riferimento trova giustificato motivo nella mancanza di illustrazione di tale specie, che il De-Angelis — nel suo studio di revisione della Coll. Michelotti: Miocene torinese — cita appena per un esemplare portante tale denominazione e caratterizzato da epiteca elevantesi fino ad una certa altezza.

Io ritengo che tanto l'esemplare di Rodi, quanto quelli della Collina di Torino siano da riportarsi a questa specie, per la quale valgono i seguenti caratteri: polipaio compresso, coste numerosissime e sottili, calice ovalare avente i diametri in rapporto circa di 2 a 1; epiteca rudimentale elevantesi fino ad una certa altezza, dopo la quale gli esemplari sono completamente nudi e lasciano scorgere assai bene le coste sottili e serrate. La columella è spugnosa, molto sviluppata, allungata nel senso dell'asse maggiore. Setti sottili in quattro cicli, tutti, meno l'ultimo — carattere di *Balanophyllia* — assai ben sviluppati. Dall'aspetto dei fossili sembra trattarsi di specie non pedicellata, ma fissa mediante base più o meno larga.

È specie assai vicina alla *Balanophyllia italica* Michn., forma abbondante nel Pliocene dell'Astigiano.

Non mi risulta che la *B. seminuda* sia di altri giacimenti, all'infuori del Miocene torinese e del Pliocene dell'attuale Collezione.

(Parte alta del dirupo sulla sinistra del fiume di Apano Calamona all'altezza della confluenza col fiume di Cato Calamona).

Eupsammia cfr. ***compressa*** Micht. — Michelotti in Sismonda, 1871, pag. 37, tav. I, fig. 6.

Un unico esemplare incompleto avvicino alla specie miocenica. Il genere *Eupsammia*, ritenuto estinto nel Miocene, ha invece nel Pliocene ancora qualche rappresentante: l'*E. contorta* De-Ang. e l'*E. porosissima* Osc., entrambe di Zinola. Prova tale sopravvivenza anche l'esemplare di Rodi, per il quale, dati

i caratteri delle coste e la presenza di sinapticule visibili presso l'orlo calicinale, il riferimento generico è accertabile.

L'aspetto generale cuneiforme del fossile e la leggera carenatura ai lati sono caratteri della *E. compressa* alla quale mi riferisco.

(Lembo di Pliocene (sabbie argillose), isolato a N-NO del Castello di Lardos).

In altre isole del Dodecaneso il Dr. Desio raccolse ancora un piccolo numero di corallari, tra i quali rinvenni le seguenti specie:

Cladocora Prevostiana M. Edw. et Haim. — *Isola di Cos* (*Kardamena P.*).

Plesiastraea Desmoulinsi M. Edw. et Haim. (Simonelli, 1897, pag. 198), specie miocenica, ma già trovata nel Pliocene parmense. *Isola di Cos* (*Colline a S di C. Psalidi*) *e Isola di Kasos.*

Orbicella planulata D'Ach. — D'Achiardi, 1868, *Studio comparativo fra i Coralli dei terreni terziari del Piemonte e delle Alpi venete.* "Ann. Univ. Pisa", anno X, pag. 14, tav. I, fig. 14. Forma conosciuta solo per il Miocene torinese. *Isola di Cos* (*Kefalos, sotto M. Cristos*).

Deltocyathus lardensis Jüssen — Jüssen, 1891, pag. 18, fig. 4. Specie rinvenuta e descritta dall'A. per l'isola di Rodi e rappresentata da un esemplare perfettamente corrispondente alla forma tipica nell'*Isola di Scarpanto* (*Pigadia*).

Rivolgo al Dr. A. Desio un vivo ringraziamento per l'occasione di studio favoritami.

Torino - R. Museo Geologico.

L'età delle filliti di Rè in Val Vigezzo (Ossola).

Nota del Socio corrispondente Prof. Ing. VITTORIO NOVARESE

Lo studio degli apparati morenici del Lago Maggiore e del Lago d'Orta (1) mi ha portato a conchiudere che nel corso dell'oscillazione α, fase di ritiro succeduta alla grande glaciazione wurmiana, i ghiacciai, abbandonando i due laghi, si ritrassero nell'Ossola e nel Ticino assai più a monte, fino ad un limite che non è dato identificare. La fase di ritiro fu così lunga da permettere la deposizione nelle parti di valle abbandonate, di notevoli sedimenti, parte alluvionali, parte lacustri. Così si formarono: la grande conoide allo sbocco della Strona, nota col nome improprio di morena di Omegna; parte dei depositi della Valtravaglia e delle alluvioni terrazzate che colmano le valli del San Giovanni e del San Bernardino nella Valle Intrasca, nonchè numerosi depositi lacustri in vicinanza di Luino e nelle varie anse del Lago di Lugano. Depositi tutti che per età corrispondono perfettamente a quelli analoghi che ho descritto nel bacino di Châtillon nella Valle d'Aosta.

Però nell'avanzata successiva, corrispondente allo stadio β, che nella Valle d'Aosta è attestata dall'apparato frontale di Chambave, a metà della valle inferiore, le fronti glaciali nell'Ossola e nel Verbano tornarono a progredire fino a giungere con tre fronti indipendenti rispettivamente ad Omegna, a Baveno ed alla linea Castagnola-Laveno all'incirca, lasciando

(1) *Gli apparati morenici wurmiani del Lago Maggiore e del Lago d'Orta. Osservazioni e studi.* Monografia in corso di stampa nel vol. LII del " Bollettino del R. Ufficio Geologico ".

sui fianchi delle conche lacustri e vallive notevoli depositi morenici, da 650 a 700 m. più bassi del più alto ordine di terrazzi della glaciazione wurmiana, e coprendo in molti luoghi col proprio erratico i suaccennati depositi dell'oscillazione α immediatamente precedente.

Una tale espansione stadiale di poco meno estesa di una glaciazione, dimostra che l'alternativa di ritiro e di avanzata ha avuto ampiezza così grande da doversi paragonare piuttosto ad una glaciazione di minor durata che ad uno stadio di ritirata, sopratutto perchè le fronti sono giunte, sia pure più indietro nelle valli, al medesimo livello che più avanti nella pianura aveva raggiunto il Wurmiano nella sua acme ed a breve distanza dalle cerchie più interne frontali delle morene wurmiane.

Questo che può chiamarsi l'ultimo conato d'invasione glaciale, è stato necessariamente determinato dal riprodursi per un periodo di tempo più breve, delle medesime vicende climatiche che hanno causato l'alternarsi delle grandi glaciazioni e degli interglaciali, non limitate ai territori montuosi più o meno elevati, ma che hanno certamente fatto sentire la loro influenza anche nella pianura. Messo in chiaro questo carattere fondamentale dell'alternativa in questione, è utile esaminare se le interpretazioni fin qui ammesse di taluni episodi dell'età glaciale non possano esserne modificate.

Nella Val Vigezzo, solco longitudinale che collega l'Ossola colla valle del Ticino, v'ha il noto ed interessante deposito lacustre con fossili — le filliti di Rè — attribuito da molti autori all'interglaciale Riss-Wurm. Come siasi però potuto conservare un deposito di materiale incoerente al fondo di una valle largamente aperta, sotto il peso dei ghiacci wurmiani che in quel luogo si elevavano ad una quota certo non inferiore ai 1250 m. (Costa di Faedo) e forse a 1400, e che avevano perciò da 600 ad 800 m. di spessore, non è agevolmente spiegabile.

Non è più probabile che il deposito siasi formato invece nell'intervallo fra il ritiro del Wurmiano e lo stadio di Bühl? Cioè quando i ghiacciai dell'Ossola e del Ticino abbassatisi di più centinaia di metri, pur sempre riempiendo le rispettive valli principali, si erano ritratti dalla Val Vigezzo ma sbarrandone

i due estremi l'avevano trasformata in un lago, e ciò principalmente nell'intervallo fra il tramonto del Wurmiano e tutta la oscillazione. Lo stesso Penck (1), che pure ha ritenuto le argille di Rè interglaciali, con una delle sue felici intuizioni sostiene che esse sono state coperte dal deposito che chiama ciottolame del Wurmiano (*Schottermasse der Wurmzeit*), " nella fase in cui il ghiacciaio stava per abbandonare il Lago Maggiore e lasciava i depositi di Luino (Creva) e della Valtravaglia „. Se si tiene presente quanto ho esposto in precedenza non si può non riconoscere che meglio di così non si potevano designare i depositi dell'oscillazione α, coperti dalle poco potenti morene estreme dello stadio β.

Analoghi sedimenti lacustri con filliti sono quelli di Calprino e di Noranco presso Lugano (2), le argille del torrente Caldè nella Valtravaglia e della cava di Creva presso Luino, segnalata questa ultima dal Baltzer fino dal 1890, ma soltanto in una nota appiè di pagina, per avervi trovato della vivianite, formatasi dentro all'argilla.

Tutti questi sedimenti sono stati dal Penck con ragione ritenuti coevi di quelli di Val Vigezzo, perchè contenenti le stesse specie vegetali e ricoperti tutti indubbiamente da morenico, il quale però non è wurmiano, ma più recente, dello stadio β. Nelle varie descrizioni del giacimento di Val Vigezzo è detto spesso che il terreno lacustre sta " sotto „ tutte le morene wurmiane, che come è noto si elevano ben oltre i 1200 m. in più terrazzi. Per esser più esatti si sarebbe dovuto dire " più in basso „. Le morene veramente wurmiane della Val Vigezzo stanno bensì al disopra del massimo livello del lacustre, perchè lo specchio del lago si stendeva al loro piede, ma non si vedono mai direttamente sovrapposte alle argille. Le morene veramente depositate sui sedimenti dell'antico lago sono quelle posteriori all'oscillazione α, e dovute alla rapida incursione in quella valle dello stadio di Bühl.

Il Penck nel monumentale suo lavoro, dopo una sagace ed approfondita discussione sopra la flora di Rè e di Pianico, che

(1) *Die Alpen im Eiszeitalter*, pag. 817.

(2) S. Blumer, *Ueber Pliocän und Diluvium im südlichen Tessin.* " Ecl. geol. Helvetiae „, vol. IX, n° 1, 1905.

ritiene contemporanee delle filliti della breccia di Hottingen presso Innsbruck, assurge alla ricerca delle caratteristiche del clima dell'interglaciale Riss-Wurm.

Se ritengo le varie località sopra elencate dell'area coperta dal ghiacciaio verbanense contemporanee e di età compresa fra il Wurmiano e lo stadio β. non mi spingo però a voler ringiovanire l'età della breccia di Hottingen.

La breccia di Hottingen, nella valle dell'Inn, più a nord di circa un grado di latitudine, e ad un'altezza di 1150 m., cioè notevolmente più elevata di Rè (650), di Luino (200), della Valtravaglia (200) e del Luganese (300), se fosse stata contemporanea di queste ultime non poteva avere la medesima flora, e particolarmente le due specie che sono comuni a quasi tutte le dette località, cioè il *Rhododendron ponticum* L. ed il *Buxus sempervirens* L., perchè aveva certamente clima assai più rigido.

L'obbiezione deve essersi affacciata anche al Penck perchè insiste sulla circostanza che nelle località meridionali più basse appare non soltanto la flora del livello a cui si trovano, ma ancora quella di tutte le pendici intornostanti che si elevano fino a 2000 m. mentre ad Hottingen le filliti sembrano essere dovute a piante cresciute in vicinanza immediata del deposito.

La deduzione finale del Penck è però che nell'interglaciale ultimo la temperatura doveva essersi mitigata di molto e dovevano esservi abbondanti pioggie estive. Queste condizioni si verificano attualmente lungo le spiagge della Georgia sul Mar Nero, ai piedi del Caucaso, dove appunto la flora attuale annovera le due specie sopramentovate, che vi crescono rigogliose e sono riguardate come indici di un clima caldo ed umido. Ma in una di quelle valli dove le due dette piante hanno il massimo della frequenza, la valle del Galisca, il picco più elevato, il Khodgial che supera di poco i 3100 m. e dista dal Mar Nero di appena 42 km., ha vedrette e ghiacciai, così che il limite climatico delle nevi vi scende certo fino ai 2800 m. almeno.

Un clima analogo deve aver regnato durante l'oscillazione α, per la quale le acute considerazioni del Penck per l'interglaciale Riss-Wurm conservano tutto il loro valore, a causa della esistenza, al tempo in cui si è verificata, delle suddette piante non solo ai margini del sistema, come a Lugano e Luino, ma molto addentro nei monti come in Val Vigezzo. Senza che ciò

richieda necessariamente la scomparsa totale dei ghiacciai dalle valli alpine in quel tempo.

Dopo il Wurmiano si è adunque avuto ancora un periodo di clima caldo ed umido da permettere che il versante meridionale delle Alpi fosse da S di nuovo invaso dalle piante più caratteristiche di quel clima, che nell'interglaciale Riss-Wurm (1) avevano prosperato sui due versanti del sistema. Questo periodo — l'oscillazione α — è stato però più breve che non i precedenti interglaciali, e fu seguito da un'avanzata, β, più breve di tempo, ma di poco meno estesa di quella del Wurmiano, alla quale succedette la graduale ritirata che ha lasciato i segni nei due stadii γ e δ.

È dopo questa alternativa che si è compiuto il cambiamento climatico che ha portato le condizioni attuali, e che probabilmente ha cagionato la scomparsa delle specie di animali e di piante proprie del Quaternario antico. Il limite fra Pleistocene ed Olocene cade nel periodo che con parola molto usata perchè comoda, ma poco precisa, si suol chiamare Postglaciale, inteso qualche volta persino come sinonimo di Postwurmiano. Se si vuol tener conto delle indicazioni paleontologiche, il limite inferiore del Postglaciale dovrebbe essere segnato appunto più in alto del Wurmiano, dopo lo stadio β. Sul versante italiano del Sistema Alpino solo dopo tale stadio i ghiacciai abbandonarono per l'ultima volta le basse valli dove ora stanno i laghi subalpini od in loro vece il piano esterno si addentra più o meno profondamente nella montagna.

Roma, 25 maggio 1927.

---

(1) Secondo l'ultima sua pubblicazione sull'argomento (*Die Höttinger-breccie u. die Inntalterrasse nördlich Innsbruck.* "Abhandl. d. preuss. Ak. d. Wissenschaften", 1920, N° 2, 4°, Berlin, 1921) il Penck farebbe risalire l'età della breccia all'interglaciale Mindel-Riss. Credo superfluo avvertire che se ad Innsbruck le due specie citate ora non si trovano più, dal versante italiano la sola emigrata è il *Rh. ponticum.*

Sulla determinazione dello schiacciamento terrestre mediante valori della gravità.

Nota del Prof. GINO CASSINIS
presentata dal Socio nazionale residente C. Somigliana (1)

. . . .
. . . .

Ho letto con vero piacere le Sue belle Note (2) sulla determinazione delle costanti del Geoide mediante sole misure di gravità, Note che conducono a un risultato della massima importanza. E ho cercato di rendermi ragione del fatto che il valore dello schiacciamento ricavato dalla sua formula di pag. 322 della seconda Nota dei Lincei, in funzione dei tre valori di g alle latitudini 0,45°, 90°, non coincide col valore ottenuto per altre vie, ivi comprese le misure di gravità attraverso la formula di Clairaut.

Mi pare di aver trovato il motivo della discordanza nel fatto che la sua formula in forma finita non lascia apparire esplicitamente che lo schiacciamento si ricava in realtà da un coefficiente di secondo ordine.

Per vedere ciò, occorre sviluppare in serie la formula fondamentale $g = \frac{a g_e \cos^2 \varphi + c g_p \operatorname{sen}^2 \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$ di pag. 320 della Nota seconda, la quale dà g ad una latitudine qualsiasi mediante i valori al polo e all'equatore. Ponendo:

$$\frac{a - c}{a} = s \,, \qquad \frac{g_p - g_e}{g_e} = b \,,$$

(1) Da una lettera al prof. C. Somigliana.

(2) C. Somigliana, *Sulle relazioni che esistono tra le costanti geoidiche e i valori della gravità*, " Rend. Lincei ", gennaio 1927, pag. 11.

Id., *Sulla determinazione delle costanti geoidiche mediante sole misure di gravità*, " Id. ", marzo 1927, pag. 319.

si trova, per la gravità teorica sull'ellissoide alla latitudine φ, l'espressione nota (almeno fino ai termini di 2° ordine inclusi):

$$g = g_e \Big[1 + b \,\mathrm{sen}^2 \varphi - \frac{s}{4}\left(\frac{s}{2} + b\right) \mathrm{sen}^2 2\varphi - \\ - \frac{s^2}{8}(2s + 3b)\,\mathrm{sen}^2 \varphi \,\mathrm{sen}^2 2\varphi + \dots\Big].$$

Per $\varphi = 45°$, si ha di qui:

$$\text{(I)} \qquad g_q = g_e \left[1 + \frac{b}{2} - \frac{s}{4}\left(\frac{s}{2} + b\right) - \frac{s^2}{16}(2s + 3b) + \dots\right].$$

La formula di Newton-Helmert:

$$g = g_e\left[1 + b\,\mathrm{sen}^2 \varphi - b_4 \,\mathrm{sen}^2 2\varphi\right]$$

dà per $\varphi = 45°$:

$$\text{(II)} \qquad g_q = g_e\left[1 + \frac{b}{2} - b_4\right].$$

Confrontando (II) con (I), si vede che i termini di 1° ordine sono identici, e dai termini di 2° ordine si ha:

$$\text{(III)} \qquad \frac{s}{4}\left(\frac{s}{2} + b\right) = b_4\,,$$

e di qui, ammessi noti b e b_4, si può calcolare lo schiacciamento s.

Precisamente si trova:

$$\text{(IV)} \qquad s = b\left[\sqrt{1 + \frac{8\,b_4}{b^2}} - 1\right],$$

e si vede che un errore e in b_4 produce in s un errore E approssimativamente dato da:

$$\text{(V)} \qquad E = \frac{4e}{b}\,.$$

Ora, il valore di b_4 si può ottenere in due modi:

1°) Per via teorica dallo studio del moto rotatorio di un pianeta fluido: e così Darwin e Wiechert, pure partendo da

ipotesi diverse circa la densità della stratificazione idrostatica nell'interno della Terra, hanno trovato valori quasi concordanti per b_4, la cui media:

$$b_4 = 0{,}000007$$

è stata introdotta da Helmert nella sua formula empirica del 1901.

2°) Per via empirica, assumendo anche b_4 come incognita oltre a g_e e b. Così Helmert ha trovato (1):

dalle stazioni continentali di gravità:

$$b_4 = +0{,}000010 \text{ con un errore medio } \pm 0{,}000014;$$

dalle stazioni costiere:

$$b_4 = -0{,}000013 \text{ con un errore medio } \pm 0{,}000012;$$

e, in media:

$$b_4 = -0{,}000002 \text{ con un errore medio } \pm 0{,}000013.$$

La differenza notevolissima dei risultati ottenuti per i due gruppi di stazioni gravimetriche e l'ammontare dell'errore medio che è circa uguale al doppio del valore che si vuol calcolare, hanno deciso Helmert a dare la preferenza al valore numerico determinato con i mezzi teorici. Non si sa quale errore medio attribuire a questo valore, ma ciò non ha grande importanza agli effetti dell'applicazione della formula empirica per il calcolo dei valori teorici della gravità, perchè l'errore che ne risulta in essi è sempre relativamente abbastanza piccolo. Così, se anche il valore assunto per b_4 fosse errato di 0,000002 (valore massimo: l'errore reale è certo inferiore), ciò indurrebbe in g un errore di cm. 0,002 al massimo, che è dell'ordine degli errori delle migliori determinazioni di gravità.

Invece, un errore $e = 0{,}000001$, induce, per la (V) un errore $E = 0{,}00076$ (perchè $b = 0{,}005302$) nel valore di s calcolato servendosi della (IV): e così, p. es., si trova:

$$s = 1 : 258 \quad \text{se si assume} \quad b_4 = 0{,}000007,$$
$$s = 1 : 293 \quad \text{se si assume} \quad b_4 = 0{,}000006.$$

---

(1) Cfr. F. R. Helmert, *Die Schwerkraft und die Massenverteilung der Erde*, " Encyklop. d. Math. Wiss. ", Bd VI, 1B, pag. 95.

I valori da Lei introdotti in calcolo desumendoli dall' " Annuaire du B. des L. " sono appunto ricavati dalla formula di Helmert del 1901 espressa nel sistema di Vienna ($g_e = 978{,}046$), e quindi con $b = 0{,}005302$ e $b_4 \doteq 0{,}000007$.

Tanto Helmert quanto coloro che, dopo di lui, hanno calcolato formule empiriche per la gravità (Hayford, Bowie, Heiskanen) avrebbero potuto introdurre per b_4 il valore che si ottiene dalla (III) dove si ponga $s = 1/298$ circa. Io credo che non lo abbiano fatto per non introdurre l'ipotesi ellissoidica in una formula basata sull'ipotesi sferoidica (1). Il valore di b_4 sarebbe in tal modo risultato: $b_4 = 0{,}000006$ circa.

Si potrebbe anche procedere nel modo che segue, senza passare attraverso sviluppi in serie. Nella Sua formula citata di pag. 322 si ponga:

$$g_p = g_e(1 + b), \qquad g_q = g_e(1 + f),$$

ottenendo:

$$s = \frac{4f - 3b + 2f^2 - b^2 + 2(1 + f)\sqrt{b - 2f + b^2/2 - f^2}}{1 + 4f - 2b + 2f^2 - b^2}.$$

Un errore e in f produce in s un errore E che ha approssimativamente il valore:

$$E = \left(\frac{2}{\sqrt{b - 2f}} + 4\right) e.$$

Ma è $b - 2f = 2b_4$, e quindi risulta presso a poco $E = 564\, e$. E cioè, un piccolo errore e produce un grosso errore E.

. . . .

. . . .

Pisa, 29 maggio 1927.

(1) Cfr. Helmert, *loc. cit.*, pag. 96.

L'Accademico Segretario
Oreste Mattirolo

CLASSI UNITE

Adunanza del 19 Giugno 1927

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. FRANCESCO RUFFINI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: i Soci D'Ovidio, Peano, Parona, Grassi, Somigliana, Panetti, Sacco, Pochettino e Repossi;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: i Soci De Sanctis, Stampini, Patetta, Prato, Cian, Faggi, Jannaccone, Bertoni e Vidari, il quale funge da Segretario.

Scusano l'assenza i Soci: Mattirolo, Majorana, Brondi, Einaudi e Luzio.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Presidente comunica la lettera, con la quale S. A. R. il Duca degli Abruzzi accusa ricevuta del diploma di Socio nazionale residente dell'Accademia, e ringrazia.

Il Segretario dà notizia della lettera del R. Istituto Lombardo che invita alla cerimonia commemorativa di Alessandro Volta, che sarà ivi tenuta giovedì prossimo, 23 corr. L'Accademia delibera di farsi rappresentare a quella cerimonia dal Socio Somigliana, al quale forse si uniranno altri Soci.

Il Presidente invita il Socio Tesoriere Panetti a illustrare il Rendiconto finanziario 1926.

Panetti spiega e commenta il Rendiconto stesso nelle sue varie voci e nelle parti attiva e passiva.

Nessuno prende la parola, onde il Presidente mette ai voti l'approvazione, che viene data alla unanimità.

Panetti passa a riferire sul Bilancio preventivo 1927 e, in seguito, sulla situazione finanziaria delle varie fondazioni. Dà in particolare notizia, rispondendo a domanda del Socio Bertoni, intorno al premio Lattes, che verrà a maturare nel 1930.

Messa ai voti l'approvazione del Bilancio preventivo 1927, essa viene pure alla unanimità concessa.

Il Presidente rivolge a nome dell'Accademia un caldo ringraziamento al Tesoriere, che amministra con saggezza e difende con energia il patrimonio sociale.

Panetti ringrazia.

Il Presidente dà la parola al Socio Patetta perchè riferisca all'Accademia riunita intorno ad alcune lettere, da lui possedute, di quel sommo Italiano, Alessandro Volta, che già la nostra Accademia ha celebrato. Il Socio Patetta riferisce infatti intorno a undici autografi voltiani a lui pervenuti in parte dall'archivio del conte Prospero Balbo, in parte per altre vie. Specialmente importante e interessante è la lettera del 7 gennaio 1767 scritta dal Volta al Beccaria a proposito degli studi sull'elettricità; e altre sono notevoli in quanto rispecchiano aspetti morali della grande figura.

Il Socio Somigliana ringrazia, a nome del Comitato nazionale per la pubblicazione degli scritti voltiani, della importante comunicazione del Patetta.

Il Presidente si associa al ringraziamento, compiacendosi anche a nome dell'Accademia.

Il Socio Faggi chiede notizia al Presidente circa la solennità inaugurale del prossimo anno e la designazione dell'oratore.

Il Presidente risponde che, sembrando doveroso di associare nel venturo anno la cerimonia inaugurale alla commemorazione cittadina e nazionale che allora si farà del duca Emanuele Filiberto, ristauratore delle sorti e iniziatore della nuova êra di Casa Savoia e del Piemonte, sarà bene che per la cerimonia

sia designato un oratore della Classe di Scienze storiche e morali; e si riserva quindi di interpellarla sull'argomento.

Il Socio Pochettino ricorda all'Accademia la proposta da essa medesima fatta di murare sotto il porticato dell'Università una lapide che ricordi i maggiori Maestri onde l'Ateneo si onora. Si avanzano a tal riguardo diversi nomi: Ruffini ricorda Cujaccio, D'Ovidio e Somigliana ricordano Cauchy, Vidari ricorda Ferrante Aporti, nome che torna quest'anno particolarmente caro alla memoria degli Italiani: l'Aporti, fondatore celebrato degli Asili d'infanzia, fu qui chiamato nel 1844 da Re Carlo Alberto per iniziare all'Università quei corsi di metodica, che furono celebratissimi, e che aprirono la via al rinnovamento pedagogico piemontese.

Il Socio Pochettino prega l'Accademia che le proposte vengano inviate al Rettorato dell'Università, possibilmente, entro il 15 luglio.

LETTURE

Lettere di ALESSANDRO VOLTA

edite dal Socio nazionale residente FEDERICO PATETTA

1. — Per ottemperare al desiderio ripetutamente espresso da colleghi dell'Accademia e da altri studiosi, do notizia d'alcune lettere d'Alessandro Volta, che fanno parte della mia raccolta d'autografi, e pubblico quelle che ritengo inedite e degne d'esser conosciute.

Posseggo del Volta dodici lettere originali, scritte dal 1764 al 1823, undici delle quali interamente autografe ed una con la sola firma. Ho inoltre copia sincrona d'una lettera del 21 marzo 1794 già pubblicata, ma della quale non si conosce l'originale: ed ho pure, con firma autografa, la ricevuta dello stipendio percepito dal Volta, come *Professore di Fisica Sperimentale della Regia Università di Pavia, in saldo* dell'ultimo trimestre dell'anno 1780 (1).

Le lettere sono di varia provenienza. Il gruppo più importante è costituito da tre lettere (2) scritte nel 1764, 1765 e 1767 al celebre fisico monregalese P. Giambattista Beccaria delle Scuole Pie, al quale furono parimenti dirette la lettera

(1) Lo stipendio era di annue lire 3300, cioè di 825 lire per trimestre. La ricevuta, fatta su modulo a stampa, ha la data di Milano, 13 genn. 1781. Si trovano in commercio dei facsimili su carta antica, sapientemente macchiata e scarabocchiata, della ricevuta rilasciata dal Volta a Pavia il 31 ottobre 1792, su modulo a stampa diverso dal primo, per l'*onorario di un bimestre*. L'*onorario* è di 683 lire, sei soldi e otto denari, corrispondenti ad annue lire 4100.

(2) Le due prime lettere mi vennero da una collezione privata torinese; la terza dalla Libreria antiquaria romana del Luzzietti, che l'offrì in vendita in un suo catalogo di parecchi anni fa.

del 2 aprile 1765 conservata nella Biblioteca di S. M. il Re in Torino (1), quella del 22 giugno 1767 che è *presso la famiglia dell'onorevole Mario Cermenati* (2), e la prima memoria scientifica pubblicata dal Volta, cioè la *dissertatio epistolaris* del 1769, *De vi attractiva ignis electrici* (3). Le cinque lettere autografe ora ricordate erano senza dubbio nella biblioteca, disgraziatamente dispersa, del conte Prospero Balbo, ambasciatore e poi ministro del Re di Sardegna, rettore, durante la dominazione napoleonica, dell'Università di Torino, e dal 1815 al 1837, anno di sua morte, presidente della nostra Accademia. Al Balbo erano pervenute fin dal 1781 per legato dello stesso Beccaria, già suo maestro.

Prospero Balbo, come scrisse di lui ancora vivente Luigi Cibrario suo biografo (4), " sebbene ad ogni utile disciplina per impulso della buona indole sua si sentisse inclinato, tuttavia era spinto più gagliardamente inver le scienze fisiche e matematiche „. Dovette invece attendere allo studio della giurisprudenza. Quando però il 25 aprile 1780, non ancora diciottenne, conseguì la laurea in legge nella nostra Università, mentre uno dei suoi professori, Innocenzo Maurizio Baudisson, tesseva in una lunghissima orazione (5) le lodi di lui e dei suoi maggiori, il Beccaria gli dedicava la breve descrizione d'*un nuovo ordigno*

---

(1) Questa lettera, pubblicata per la prima volta nel terzo volume dell'*Edizione Nazionale*, pag. 1 e segg., fu acquistata, non molti anni or sono, presso la Libreria antiquaria torinese dei Fratelli Bourlot, essendo bibliotecario di S. M. il Re il compianto nostro socio barone Antonio Manno.

(2) *Ediz. Nazionale*, vol. III, pag. 17 e segg.

(3) Ristampata nell'*Ediz. Nazionale*, vol. III, pag. 21 e segg.

(4) Nelle *Notizie biografiche* premesse al primo volume, solo pubblicato, delle *Opere varie* di Prospero Balbo, Torino, 1830, pag. v. Le *Notizie biografiche*, di cui si fece una tiratura a parte, senza data e senza altre indicazioni, contengono in fine un *Regio Biglietto* di Carlo Felice in data di Torino, 15 dicembre 1821. Credo che ciò valga a spiegare l'errore, in cui si cadde nel volume *Il primo secolo della R. Accademia delle Scienze di Torino*, Torino, 1883, registrandole a pag. 115 come stampate a Torino nel 1821. Lo stesso titolo di *Notizie biografiche del conte Prospero Balbo* ha pure la necrologia scritta dal Cibrario per la *Gazzetta Piemontese*, n° 70 del 1837, e pubblicata anche separatamente in un opuscolo di 24 pagine in-12°, (Torino), Tipografia Favale, 1837.

(5) Innocentii Mauritii Baudisson *Orationes pro comite Prospero Balbo...*, Torino, Briolo, *s. a.* L'orazione per la laurea occupa le pagg. 21-96.

disegnatore dei fulmini (1), affermando che *questa maniera di congratulazione* non sarebbe parsa strana a chi conosceva il festeggiato e non poteva quindi ignorare " che altre parole non *aggradiva* di più che quelle, le quali trattino di scienza e di fisica massimamente, nello studio della quale si *era* singolarmente distinto, e per la quale *serbava* ognora tutta l'affezione *sua* ". Che queste affermazioni del Beccaria corrispondessero ad intimo convincimento, è dimostrato dal fatto, che morendo, a distanza appena d'un anno (27 maggio 1781), egli lasciò in legato al giovane Balbo tutti i suoi manoscritti e il suo ricco carteggio. Due anni dopo un altro discepolo illustre del Beccaria, Giuseppe Antonio Eandi, dedicava al Balbo le sue *Memorie istoriche intorno gli studi del Padre Giambattista Beccaria* (2), e il Balbo aggiungeva in appendice, volgarizzate, sei lettere di Beniamino Franklin, avvertendo: " Può questo considerarsi come un picciolo saggio della numerosa raccolta, che conservo, di preziosissime lettere scritte al P. Beccaria dagli uomini più grandi, che possa vantare il nostro secolo e l'Europa: sebbene moltissime sianosi

---

(1) Opuscolo di 20 pagine, in-8° piccolo, e una tavola, *s. l. a. et t.*, che in luogo del titolo ha la dedica: " Giambattista Beccaria — delle Scuole Pie — congratulandosi — col signor conte — Prospero Balbo — della sua laurea — in giurisprudenza — gli appresenta la descrizione — di un suo nuovo ordigno — disegnatore — de' fulmini ". L'opuscolo venne in seguito riunito materialmente ad un altro, pubblicato dal Beccaria per la laurea in giurisprudenza del conte G. F. Sanmartino della Motta, premettendo una carta col titolo collettivo: *Di un ceraunografo e della cagione de' tremuoti*, Torino, Briolo, 1780.

(2) Torino, Stamperia Reale, 1783. L'aggiunta del Balbo occupa le pagg. 145-161. Appunto a pag. 161, dopo aver dato il catalogo delle opere inedite del Beccaria, egli scrive: " Gli scritti che posseggo del chiarissimo padre Beccaria non mi pervennero tutti per legato dell'illustre defunto: alcuni pochi me ne sono altronde procurato, ed alcuni pure mi sono stati favoriti per cortesia dal signor abate Eandi, dal signor barone Vernazza e da altri ". Nel verbale manoscritto della seduta accademica del 3 luglio 1794 si legge: " Il conte Balbo fece dono all'Accademia di tutti i manoscritti a lui lasciati dal P. Beccaria, coll'aggiunta di alcuni altronde procacciati e delle opere stampate del medesimo autore; della qual collezione si tesserà un catalogo separato ". Sembra però che, forse in attesa della compilazione del catalogo, la collezione non sia mai stata consegnata all'Accademia. Certo nella biblioteca accademica non c'è traccia nè del catalogo progettato, nè dei manoscritti del Beccaria.

smarrite per colpa dello stesso Padre, il quale poco forse curavasi. e poco abbisognava di questa postuma gloria „.

Fra le *preziosissime lettere* avevano dunque degna sede anche quelle del Volta. La lunga e importante lettera del 2 aprile 1765, già pubblicata nel terzo volume dell'*Edizione Nazionale*, era finora la prima lettera del Volta, di contenuto scientifico, che si fosse potuto rintracciare (1). La priorità, fino a nuove possibili scoperte, passa ora alla lettera del 16 maggio 1764, della quale do qui il testo:

Molto R(*everen*)do P(*ad*)re P(*ad*)ron Col(*endissi*)mo,

Como, 16 maggio 1764.

È ormai scorso un anno, da che inoportunamente, come ho ragione di avvedermene, e con poca discrezione ancora presi ad incommodare V(*ostra*) P(*aternità*) M(*olto*) R(*everenda*) con una mal intesa e frivolissima cicalata intorno l'eletricità; onde richiamandomi a memoria quanto su questo argomento ho avanzato poco fondatamente e quanto dall'evvidenza de' fatti venne in appresso smentito e dimostrato insussistente, entro in sospezione, che questa sia stata la vera cagione, per cui V. P. M. R. non abbia stimato convenevole dar congrua risposta a sì fatte inezie, che nemeno importavan la briga di leggerle. Per questo riflesso non saprei in verun conto intaccare V. P. M. R. d'impolitezza, se negando i lumi alla mia vana curiosità volle mortificare nel tempo stesso il mio troppo presontuoso ardire, col quale, quantunque persona a lei per niun titolo aderente, mi feci a disturbarla con un sì voluminoso scartafaggio da' più serj studj, a cui senza meno si sarà trovata allora, e si troverà di presenti onorevolmente impiegata; che anzi un cotal pentimento mi sopragiunse d'essermi avanzato a tanto, che nemmeno ebbi cuore finora di umiliarle in emmenda del fallo le debite scuse pel timore, che queste non potessero aver la sorte di (2) riuscire acettevoli. In cotesta perplessità mi mantenni per tutto il tempo scorso d'allora in poi, finatantochè mosso da più pressante desiderio di compiere a' miei precisi doveri mi deliberai a farlo con questo foglio, a costo anche di non arrivare ad ottenere il sospirato compatimento, del quale però mi fa sicuro la di lei rettitudine e gentilezza, qualora si compiaccia riflettere all'immatura mia età, la qual vuole si attribuisca a leggierezza uno

(1) Cfr. Carlo Somigliana, *La vita scientifica di Alessandro Volta*, negli *Atti* della nostra Accademia, vol. 62, 1927, pag. 213.

(2) A questo punto nella lettera originale è aggiunto sopra la linea un *non*, che evidentemente è fuor di luogo.

sconsigliato ardire od estro capriccioso, qual fu appunto quello d'indirizzare a V. P. M. R. quella lunga filastroca d'inutili e puerili ragionamenti.

Per rimediare adunque al mal già fatto, altro partito non mi resta che quello di ritrattare per certo modo quanto contenevano que' fogli, e pregarla di non farne caso, come appunto s'io non glieli avessi nemeno inviati, con questa riserva però, che tutto quello ha rapporto e tende a far giustizia al di lei merito e ad esaltare la non mai abbastanza commendabile lei dottrina e scienza, tutto, dico, si abbia per ben detto, e solo difettoso reputato in questo, che non salga condegnamente a pareggiare il soggetto, a cui si riferisce. Se poi il discreto giudizio di V. P. M. R. qualche altra cosa ancor circa la sostanza della quistione per tolerabile amettesse e degna di qualche giudizioso riflesso o schiarimento, non solo in questo non amerei ritrattarmi, chè anzi proverei un estremo compiacimento e soddisfazione sapendo dí aver avuto la sorte di fare cosa non disaggradevole col presentare a V. P. M. R., intesa solo alla ricerca del vero, un'occasione di accingersi a ulteriori tentativi per venire in chiaro di sempre nuove verità; questo solo basterebbe per invaghirmi tanto e insuperbirmi di quel scritto, quantunque fosse pel rimanente ricolmo di gravissimi errori, che del tutto non m'increscesse l'essermi azardato a comporlo. Io però tanto non presumo di me medesimo, nè saprei ove potessi aver colto il vero, se non fosse mai nell'assegnata differenza ch'io preconizai dover intervenire fra la presupposta elettricità *vitrea* e *resinosa*. Confesso, che tuttora mi rimane qualche dubbio, anzi fondata speranza, e ciò che solo mi fa temere, che la bisogna non vada giusta i miei divisamenti, si è il riflettere, che questi divisamenti son miei, e ch'io son solito prendere di grossi granchj, come per mia mala sorte ho dovuto accorgermi dagl'altri innumerevoli sbagli, in cui sono incorso circa la medesima elettricità, e nello scritto medesimo. Checchè siasi però di questo, siccome da me medesimo e colla scorta di alcune esperienze son venuto in chiaro degli altri errori anche di minor rilievo, non saprei spiegare quanta inquietudine mi rechi lo stato di sospensione in cui tuttora vivo circa tal punto; non ardirei però richiederne da V. P. M. R. il dilucidamento, se per altra parte questa mia non meritasse riscontro, acciò ch'io sappia per quiete del mio animo qual destino abbia presso di lei incontrato, e di un benigno compatimento mi assicuri, per mezzo del quale V. P. M. R. si degni riguardarmi qual mi protesto

Di V. P. M. R. Divotissimo Umilissimo Servitore

Alessandro Volta (1).

(1) Il testo di questa lettera occupa nell'originale due pagine e mezza. L'indirizzo manca. Nella quarta pagina rimasta in bianco è buttato giù a

Da questa lettera (che, con le sue molte ripetizioni, fa veramente pensare alla confessione fatta dal Volta in una successiva, di non sapersi *spiegare con precisione e nettezza e di non avere il dono della brevità* (1)) veniamo a sapere che un anno prima, cioè verso il maggio del 1763, egli aveva mandato al Beccaria *un voluminoso scartafaccio* sull'elettricità, e non aveva ancora avuto risposta. In principio della già ricordata dissertazione *De vi attractiva ignis electrici*, il Volta afferma di aver comunicato all'abate Nollet alcune sue idee sull'elettricità fin dal 1763. Evidentemente egli le aveva comunicate contemporaneamente, o quasi, anche al Beccaria; ed è certo da deplorarsi che questi primi scritti del grande fisico, allora appena diciottenne, siano probabilmente perduti.

Alla lettera del 16 maggio 1764 il Beccaria dovette rispondere, certo prima della fine dell'anno, in modo assai cortese, promettendo al Volta " *di tosto comunicargli quel tanto circa l'elettricità, che già disegnava dare alle stampe* ". Il Volta, incoraggito, gli diresse quindi la lettera del 2 aprile 1765, rendendogli conto delle sue nuove esperienze sull'elettrizzazione per stropicciamento di varii corpi e specialmente della seta. Nuovo lungo silenzio del Beccaria, e nuova lettera del Volta:

---

lapis, forse dal Beccaria, lo schizzo di non so qual meccanismo. Nel riprodurre questa lettera e le successive, del Volta e dell'Antinori, ho rispettato l'ortografia, anche se errata; ho sciolto qualche abbreviazione, e mi sono permesso qualche cambiamento per ciò che riguarda l'uso delle maiuscole e delle minuscole, e la punteggiatura. Questa è irregolarissima soprattutto nelle lettere dell'Antinori, come ebbi a constatare in due originali, che posseggo, oltre che nelle copie favoritemi.

(1) Cfr. Somigliana, op. cit., pag. 214, e quanto il Volta scriveva nella lettera, che riprodurrò in seguito, datata (erroneamente) 15 agosto 1816. Va però osservato che i difetti, che si riscontrano nei primi scritti del Volta, si attenuano grandemente o scompaiono affatto in quelli dell'età matura, quantunque anche in questi egli non possa neppur lontanamente competere, per precisione ed eleganza di lingua e di stile, con un altro insigne scienziato, suo collega a Pavia, lo Spallanzani.

Molto Reverendo Padre Padron Colendissimo,

Como, li 30 luglio 1765.

Sono già alcuni mesi, ch'io mi presi la libertà d'incommodare V. P. M. R.da con mia lettera concernente alcuni pochi esperimenti da me fatti circa l'elettricità delle sete. Il non averne finora ricevuto alcun riscontro mi fa credere, che la lettera siasi per avventura smarrita, come bene spesso accade. Nè per verità altro io saprei figurarmi fuori di questo, troppo del resto persuaso essendo della di Lei gentilezza dappoichè ad altra mia dell'anno scorso io n'ebbi compitissima risposta. Se non che mi cade un sospetto, che V. P. M. R.da si sia recato a male, ch'io le abbia di nuovo replicato l'incommodo, dopo la promessa fattale di non più importunarla con mie lettere; e che per questo non si sia resa a compiacermi della tanto sospirata risposta, affine anche di torsi d'attorno la molestia d'uno, che ad ogni tratto viene con nuove seccate ad infastidirla. Questi [!] però è un mero scrupolo che mi resta; perocchè, quantunque io riconosca d'essermi troppo abusato della Lei sofferenza a segno fors'anche di stancarla, e vegga benissimo, che non a torto potrebbe di me lagnarsi, pure troppo più favorevole concetto mi son formato del di Lei bell'animo, e troppo lontano io son dal credere ch'Ella si offendesse sì altamente di un tal fallo, e sì severamente il punisse, che per esso solo avessi ad incorrere la di Lei disgrazia. Ma perchè questo solo scrupolo basta a contristarmi e fare ch'io viva inquieto, e che dall'altra parte egl'è uno scrupolo che, per quanti sforzi io faccia, da me solo non posso togliere e dileguare, però ricorro a V. P. M. R.da, ch'Ella sola può tormi da quest'affanno e metter in calma il mio spirito, mentre per me è una spina al cuore quel rimorso continuo ch'Ella abbia avuto ad offendersi e disgustarsi de' fatti miei. Mi prometto questa volta che non vorrà dar pena maggiore al mio fallo col negarmi questa grazia e lasciarmi privo del conforto di cui la supplico; ma che anzi si muoverà ad appagarmi, non tolerando ch'io rimanga più a lungo in questo stato di agitazione; onde sto in attenzione di ricevere due righe per cui io sappia almeno se le è pervenuta o no la mentovata mia lettera; ma soprattutto quel che mi preme è una sincerazione (e questa pure la sto con impazienza attendendo), che tal lettera non se l'abbia recata a male, nè sia per alcun conto rimasa di me disgustata. Questo è stato il motivo, che mi ha spinto a scrivere la presente, e contravenire con ciò un'altra volta alla promessa che già le feci di non volerla più incommodare; ma di questo Ella stessa saprà scusarmi. Dell'istessa occasione però mi prevalgo per ricordarle la promessa, che V. P. M. R.da mi fece fin dall'anno scorso di tosto comunicarmi quel tanto circa l'elettricità, che già disegnava dare alle stampe; sebbene

tal promessa voglio credere ch'Ella l'averà presente senza ch'io gliela ricordi. Ma ho voluto ritoccarla per mostrarle l'impazienza ch'io ho di vedere alla luce questo nuovo suo parto, il quale quanto più va tirandosi in lungo e si va differendo, tanto più in me se ne avviva il desiderio. Io spero che oramai poco mancherà per dargli l'ultima mano, onde aspetto che quanto prima V. P. M. R.da me ne faccia parte, seppure anche questo favore la mia importunità non me l'ha fatto demeritare. Intanto, pieno di ossequio e di verace stima, resto

Di V. P. M. R.da

Umilissimo Obbligatissimo Servitore
ALESSANDRO VOLTA.

Al Molto Reverendo Padre Padron Colendissimo
Il Padre Don Giambattista Beccaria delle Scuole Pie.
Torino (1).

Anche a questa lettera il Beccaria dovette certamente rispondere, e qualche nuova lettera ricevere dal Volta nei restanti mesi del 1765 e poi nel 1766. Queste lettere andarono però distrutte, o sono tuttora nascoste. Negli ultimi giorni del 1766 il Beccaria scrisse al Volta, mandandogli, come aveva promesso, i primi fogli delle esperienze inviate all'Accademia delle Scienze di Londra. Si trattava probabilmente dello scritto, che procurò al Beccaria la lettera del Franklin in data di Londra, 29 maggio 1766, e che fu stampato a Torino dal Fontana e poi, con qualche aggiunta, nel vol. LVI, pag. 105 e segg., delle Memorie dell'Accademia londinese: *Novorum quorumdam in re electrica experimentorum specimen, quod Regiae Londinensi Societati mittebat die 14. Ianuarii anni 1766. Ioannes Baptista Beccaria ex Scholis Piis* (2).

---

(1) La lettera occupa due pagine; la terza è in bianco; nella quarta è l'indirizzo e uno dei soliti segni fatti a penna dall'ufficio postale.

(2) Opuscolo, che nella stampa del Fontana è di due sole carte in-4°. Poco dopo il Beccaria mandò all'Accademia di Londra un altro saggio: *Novorum quorumdam in re electrica experimentorum specimen, quod Regiae Londinensi Societati mittebat die 26. Aprilis 1766. Ioannes Baptista Beccaria ex Scholis Piis*. Questo saggio, stampato esso pure a Torino dal Fontana, in 2 carte in-4°, a quanto dice il Balbo, non fu letto alla Società reale di Londra se non il 4 giugno 1767. Altre due carte, stampate dal Fontana, contengono la lettera al Franklin, *De electricitate vindice*, datata del 20 febbraio 1767; e quattro carte lo scritto *De athmosphaera electrica*, inviato parimenti alla Società reale di Londra, e datato 26 febbraio 1769.

Il Volta ringraziò con la seguente lettera:

Molto Reverendo Padre Padron Colendissimo,

Annessi alla di lei compitissima ho ricevuto i due primi fogli delle sperienze inviate all'Accademia di Londra. Son più che certo, ch'ella ne avrà riportato gran lode e onore; onde io stimo, che a me non convenga di aggiungere le mie alle lodi di una sì celebre società. Dirò sol questo, che a me sembra, che l'elettricità maneggiata dalle di lei mani faccia di gran progressi; e dove parea che, rallentato quel primiero fervore di coltivarla che si vide negl'anni addietro, in cui l'elettricismo fece cotanto strepito, venisse al dì d'oggi in poco credito appresso i Fisici e da essi trascurata fosse, se non posta affatto in abbandono; a me sembra, dico, che per la lei opera ed applicazione indefessa or torni a rifiorire. Fra gl'esperimenti contenuti ne' succennati fogli assai mi piacquero que' che riguardano il dare o il ricevere di certi corpi secondo che con questo o con quell'altro corpo si stropicciano. Questi sperimenti mi colpirono e fissarono dippiù la mia attenzione, stantechè io aveva già fatti di per me tentativi di questo genere, come sopra le sete, i peli del cane, del gatto, ecc. Quelli però ch'ella rapporta sono in magior numero, e più precisi ancora ed esatti, come vedo dalla tavola del dare e ricevere; sicchè mi riuscì nuovo, per esempio, che il vetro aspro dia alla mano anzichè ricevere, e il zolfo riceva dalla carta dorata invece di dare. Ponendo ad esame di tal sorta diversi altri corpi, altre varietà andrà di mano in mano osservando; e ciò potrà benissimo condurla ad iscoprire quali particolari disposizioni si ricerchino in un corpo acciò venga determinato a dare od a ricevere. Ma più di tutto poi nuove e curiose mi riuscirono le sperienze de' due vetri, e quella ch'ella chiama oscillazione dell'elettricità. Io vorrei provare a far tali esperienze con tre vetri, o anche con quattro, e sarei curioso di vedere cosa ne risulta.

Sto attendendo con ansietà i fogli susseguenti, quali credo non saranno nè meno curiosi, nè meno interessanti dei primi. Ma quando mai comparirà l'opera che ci promette? Se do retta al mio impaziente desiderio, parmi diggià che troppo tardi. Se io però mi animo a farle coraggio perchè dia l'ultima mano all'opera dissegnata, non intendo già che la di lei salute ne abbia a soffrire; anzi vorrei che di questa tenesse particolar cura, poichè intendo che da qualche tempo siasi fatta cagionevole. Cooperi dunque al suo perfetto ristabilimento, che più di tutto mi sta a cuore, e compiacciasi darmi nuova dello stato di sua salute in occasione che m'invierà in seguito gl'altri fogli; che io stando in aspettazione di sentirle buone queste nuove e di mia consolazione, cresco

ogni dì sempre più nella stima e nell'affezione verso di lei, con che mi raffermo

Di V. P. M. R.da

Como, li 7 gennaio 1767.

Divotissimo Obbligatissimo Servitore
ALESSANDRO VOLTA.

Ella mi ha distinto col titolo di Canonico. Io non lo sono, chè non ho preso stato ancora. Credo ch'ella abbia preso abbaglio per esservi due Canonici Volta, un mio Zio, l'altro Fratello; il primo di questi porta appunto il mio medesimo nome di Alessandro (1).

Dopo questa, come già s'è detto, si conosce finora un'altra sola lettera del Volta al Beccaria, quella cioè del 22 giugno 1767; dalla quale sappiamo che il nostro piemontese aveva dichiarato al suo giovane corrispondente, come questi riferisce, traducendo evidentemente gli elogi del Beccaria in termini più che modesti, *di aver fatto qualche conto così della prima che dell'ultima* lettera da lui ricevuta.

2. — Alle lettere al Beccaria segue, in ordine di data, una interessante lettera scritta da Como, il 27 luglio 1777, e diretta senza dubbio al fisico milanese Marsilio Landriani (1746-1815). L'acquistai, una ventina d'anni or sono, a Modena. Nel 1834 apparteneva al fisico Stefano Giovanni Marianini (1790-1866), professore a Venezia e poi a Modena, e fu pubblicata in quell'anno da Giuseppe Ignazio Montanari in *Lettere inedite di Alessandro Volta*, Pesaro, Nobili, pagg. 98-100. Si connette con le prime lettere del Volta allo stesso Landriani edite dal Riccardi a Modena nel 1876, per nozze Formiggini-Oddono. L'edizione del 1834 non è molto corretta. A pag. 98, lin. 6, vi si legge *Mossati* in luogo di *Moscati*; a lin. 9-10, *attese l'incombenze* in luogo di *attesa l'incombenza*; a pag. 99, lin. 17, *e di più è* in luogo di *e di qui è*, e nella linea ultima *valgano* invece di *valgono*. L'originale, di due pagine in-4°, ha così numerose correzioni e cancellature, che, se non ci fosse a tergo, nel margine superiore,

(1) La lettera occupa due pagine di grande formato. La seconda carta, nel cui rovescio doveva trovarsi l'indirizzo, fu tagliata. Nella seconda pagina c'è un appunto, probabilmente di mano d'un familiare del Beccaria: “*cavaliere danes con il medico fava*”.

l'annotazione di mano del destinatario " *Volta - Como - 77* ", si potrebbe credere una minuta. La carta, che doveva contenere l'indirizzo, fu strappata.

3. — Di scarso interesse sono le due lettere, che erano a Ferrara nella collezione di Giuseppe Cavalieri (1). La prima, diretta da Pavia il 21 dicembre 1785 a Donna Teresa Ciceri, nata Castiglioni, in Como, ci mostra il Volta sceso dal santuario della scienza alle miserie della vita quotidiana: " Le accludo la mostra di amoer (2), che è stata scelta tra quelle da V. S. Ill.ma trasmessemi, e di cui favorirà mandarmene braccia 19. Ella troverà forse di poter fare qualche ribasso al prezzo indicato di L. 4. I pomi di terra, che mi ha favoriti, sono stati graditissimi alle persone che me ne aveano fatto richiesta; onde sono a pregarla di mandarmene ancora 20 o 30 libbre. — Non ho trovato ancora occasione per trasmetterle le L. 800, che portai meco a quest'oggetto a Milano in una corsa, che vi feci tre giorni sono, senza trovare neppur ivi un mezzo pronto e sicuro... " (3).

Destinatario della seconda lettera è Gaetano Cattaneo, che era direttore del Gabinetto numismatico di Milano da lui creato, e doveva essere una gran brava persona, amico del Manzoni, del Grossi, del Porta, in relazione epistolare con una quantità di letterati e studiosi, italiani e stranieri, grandi e piccoli, e sempre pronto a render servizio a tutti (4).

---

(1) Sono indicate in *Catalogue des livres composant la Bibliothèque de M. Giuseppe Cavalieri à Ferrara*, Firenze, De Marinis, 1908, pag. 524; poi nel catalogo della vendita fatta a Milano nel 1914: *Catalogue de la Collection de M. le comm. Gius. Cavalieri*, Munich, Hugo Helbing, 1914, pag. 76, n° 1437.

(2) Suppongo che si tratti d'una qualità di stoffa detta in francese *la moire*.

(3) La lettera è d'una pagina. Nella quarta pagina è l'indirizzo con sigla e bollo postale illeggibile.

(4) Lo dimostrano le sue molte minute di lettere e il suo ricco carteggio venuto da gran tempo nelle mani dei librai e dei collezionisti d'autografi. Il *Dizionario biografico* del Garollo non dà del Cattaneo nè l'anno di nascita nè quello della morte. Il *Moniteur des dates* dell'Oettinger dice sconosciuto l'anno di nascita, ma indica come luogo del decesso Trieste e come data il 10 settembre 1841. La data è confermata dalla seguente annotazione firmata con le iniziali *C. Z.* ed apposta alla minuta, che ho con

La lettera del Volta, scritta ancora su carta che ha nella filigrana, grossolanamente disegnato, un tondo con la testa di Napoleone coronata d'alloro e l'iscrizione " NAP. IMP. DE' FRAN. RE D'ITALIA ✶ ", è la seguente:

Riveritissimo Signore, Signor Padrone Colendissimo,

Como, li 13 agosto 1816.

Son pochi giorni che ricevetti la stimatissima sua dei 2 luglio diretta a Barlassina, ove tengo bensì una casa di campagna, ma non vi abito che pochi giorni di autunno, seppure me la lascino in libertà i frequenti alloggi militari e il quasi continuo passaggio di carriaggi da trasporto, per i quali sono oramai due anni che non vi ho più abitato. E quando sarà mai che finiscano?

Ella mi avvisa, che le son giunti per me cinque volumi dell'Enciclopedia di Krünitz, cioè 120, 121, 122, 123, 124; ma i due 120 e 121, terminando coll'articolo *Reichswald*, li tengo io già, e mi furono da Lei medesima provveduti in continuazione dei precedenti; gli altri tre dunque li riceverò volontieri io stesso quando verrò a Milano, che sarà fra un mese circa, nel qual tempo soddisferò al mio debito, se un tal ritardo non le rincresce.

Godo di quest'occasione per contestarle i sentimenti di una verace stima, dichiarandomi

Suo Div.mo Obbl.mo Servitore
C.te ALESSANDRO VOLTA.

All'Ornatissimo Signore
Il Signor Cattaneo
Ispettore nella Zecca di
Milano (1).

---

parecchie altre, di una lettera in francese al consigliere aulico Leopoldo Welzl de Wellenheim, noto numismatico: "Autografo del signor Gaetano Cattaneo, Direttore dell'I. R. Gabinetto Numismatico di Milano. Questa minuta di lettera stava egli scrivendo nel giorno 9 settembre 1841 alle ore tre pomeridiane: alle ore 5 antimeridiane del giorno 10 settembre detto anno, il signor Cattaneo non era più ". Nel COMANDINI, *L'Italia nei cento anni del secolo XIX*, al 10 settembre del 1841, si legge che il Cattaneo morì a Milano, e che era nato nel 1771. Interessanti notizie sul Cattaneo si trovano nel WURZBACH, *Biographisches Lexicon des Kaiserthums Oesterreich*, vol. II, Vienna, 1857, pag. 311-312; ma non è dato nè l'anno della nascita nè quello della morte. Si dice soltanto che morì a Milano, facendo seguire la notizia da un punto interrogativo chiuso fra parentesi.

(1) Anche questa lettera è d'una pagina, e nella quarta pagina ha l'indirizzo con sigla e bolli postali. In uno dei bolli è scritto, in nero, COMO; nell'altro, in rosso, una parola illeggibile e poi la data 15 AGO°.

4. — La copia sincrona della lettera 21 marzo 1794 merita pure qualche parola d'illustrazione. Essa fu erroneamente ritenuta originale ed autografa, ed insieme con le sei lettere veramente originali, di cui dirò fra poco, venne nel 1914 offerta in vendita, a prezzo abbastanza elevato, dalla Libreria antiquaria fiorentina De Marinis (*Catalogo* XIV, n[i] 294-300). La lettera, al pari d'una precedente, che nella sua forma originaria non fu finora rintracciata, è diretta all'abate Antonio Maria Vassalli (che dopo la morte dello zio Giuseppe Antonio Eandi (1735-1799) aggiunse al suo il cognome Eandi), perchè la comunicasse alla nostra Accademia delle Scienze, e fu pubblicata solo nel 1862 dal *Nuovo Cimento*, vol. XV, pagg. 184-88, con questa semplice avvertenza: " Crediamo di far cosa molto grata ai lettori pubblicando per la prima volta la presente lettera, che porta la data di Pavia li 21 marzo 1794 ". L'editore, anonimo, non disse se traeva la lettera dall'originale o, com'è più probabile, da una copia, che potrebbe anch'essere quella ora da me posseduta; e dichiarandola inedita, non s'avvide che la parte sostanziale si trovava già, con qualche aggiunta e qualche correzione, nelle due prime lettere al Vassalli pubblicate fin dal 1794 a Pavia negli *Annali di chimica e storia naturale* di Luigi Brugnatelli, tomo V e VI, col titolo: *Nuova memoria sull'elettricità animale... in alcune lettere al Signor Abate Anton Maria Vassalli* (1).

Il piccolo enigma dei due testi e delle date in parte diverse si spiega molto facilmente. Il Volta, pubblicando le due lettere al Vassalli nello stesso anno 1794, nel quale le aveva effettivamente scritte e mandate, non solo rivide il testo modificandolo come meglio credeva, ma volle anche dividerlo più razionalmente. Perciò una parte della seconda lettera, che è del 21 marzo, venne aggiunta alla prima, che nell'edizione porta la data del 10 febbraio e che era stata comunicata alla nostra Accademia,

---

(1) Nel primo volume dell'*Edizione Nazionale* sono stampate sei lettere del Volta al Vassalli, cinque già conosciute da tempo e una pubblicata per la prima volta. Vi è anche ricordata la lettera edita nel vol. XV del *Nuovo Cimento*, ma (forse a torto) non si credette necessario di ristamparla. Nel *Nuovo Cimento*, così nel testo come nell'indice, si stampò erroneamente *Eaudi* in luogo di *Eandi*. Nel testo c'è qualche inesattezza. A completare la lettera manca in fine la sola sottoscrizione: *Di V. S. Ill.*[ma] – *Divotissimo Obbligatissimo Servitore* – *A. Volta.*

come dirò, nella seduta del 17 febbraio. Viceversa in fine della seconda lettera il Volta fece nell'edizione una notevole aggiunta: e in tutte due le lettere dovette per necessità omettere o modificare le parti accessorie.

Una nuova lettera fu diretta dal Volta al Vassalli il 27 ottobre 1795, della quale abbiamo copia nella biblioteca dell'Accademia e che fu stampata fin dal 1796 nel tomo undecimo dei citati *Annali* del Brugnatelli.

Una quarta lettera, del 20 dicembre 1795, è parimenti posseduta in copia dalla nostra Accademia, e fu pubblicata per la prima volta dal Cantoni nel 1878 insieme con una quinta lettera, che s'attribuisce all'autunno dello stesso anno 1795. Questa quinta lettera fu desunta dagli abbozzi autografi del Volta. Pur non avendola esaminata intrinsecamente e in rapporto alle altre lettere, poichè si tratta d'argomenti che non sono affatto di mia competenza, non posso non esprimere il dubbio che non sia mai stata mandata. Nell'*Edizione Nazionale* (vol. I, pag. 387 e seg.) fu infatti pubblicata per la prima volta una lettera diretta al Vassalli da Pavia il 29 gennaio 1796, in principio della quale il Volta ricorda una sua prima lettera scritta nell'ottobre del 1795 (evidentemente quella del 27 ottobre) e una *seconda lettera assai lunga scritta circa un mese prima*, che dev'essere la lettera del 20 dicembre 1795. Per la lettera attribuita all'autunno del 1795 parrebbe dunque che non ci sia posto, perchè se fosse anteriore a quella del 27 ottobre 1795 sarebbe stata presumibilmente pubblicata insieme dallo stesso Volta; se fosse posteriore (1) la lettera del 20 dicembre sarebbe stata la *terza* e non la *seconda*. Di tutto questo lascio però ad altri il giudizio definitivo.

Per parte mia ho voluto esaminare i processi verbali manoscritti delle adunanze tenute dall'Accademia nel 1794, 1795 e 1796, e vi trovai appunto ricordate parecchie delle lettere in questione.

Nella seduta del 16 febbraio 1794, per mancanza di tempo " non si potè leggere una lettera del Cavalier Volta al Professor Vassalli, da questo comunicata all'Accademia, nella quale si

(1) In uno dei manoscritti del Cartellario Voltiano la lettera ha infatti la data di *Como, 30 ottobre 1795*. Dovrebbe quindi esser posta dopo la lettera del 27 ottobre, come quarta, e non come quinta lettera.

combatte la pretesa elettricità muscolare „. Si tratta, come ho già detto, della prima lettera.

Nella seduta successiva, del 23 febbraio, presenti quindici soci, si procedette “ all'elezione di un accademico straniero, in vece del defunto Cavaliere di Born „, cioè del celebre mineralogista Ignazio von Born, morto fin dal 1791. Il Volta fu proposto con dieci voti, e “ nella votazione fu eletto a pieni voti „. Dodici erano gli altri proposti, con un numero di voti variante da uno a cinque; e tutti, o quasi tutti (1), scienziati d'alto valore. Il Volta ebbe subito avviso dell'avvenuta elezione dal Vassalli, e poco dopo ricevette “ la partecipazione in forma e la patente dal meritevolissimo segretario „ (2), cioè o da Prospero Balbo segretario aggiunto, o, molto più probabilmente, dall'abate Valperga-Caluso segretario perpetuo. Con la lettera del 21 marzo ringraziò appunto il Vassalli, e lo pregò di ringraziare in suo nome *il Segretario e il corpo tutto, dispensandosi* così dallo “ scrivere altre lettere ed altri ringraziamenti „. Lettera e ringraziamenti saranno stati dal Vassalli comunicati personalmente ai singoli soci, poichè i verbali non ne fanno menzione.

Nella seduta del 20 dicembre 1795, “ il Professor Vassalli era per comunicare una lunghissima lettera a lui scritta dal nostro socio Cavalier Alessandro Volta, data da Como li 27 ottobre ultimo scorso, la quale s'aggira sull'elettricità animale; ma per mancanza di tempo se n'è portata la lettura all'adunanza successiva „. Infatti nell'adunanza successiva, tenutasi solo l'11 febbraio del 1796, “ si lesse la lettera del Cavaliere Volta al Professore Vassalli, già accennata nell'adunanza precedente, nella quale continua egli a combattere la pretesa elettricità muscolare, ed accenna in una poscritta (3) alcune sue rilevantis-

(1) I dodici proposti sono indicati nel verbale col solo cognome. C'è uno Schwartz, che non so chi sia. Gli altri devono essere Antonio Cagnoli, Andrea Comparetti, Richard Kirwan, Gianfrancesco Giuseppe Malfatti, Giuseppe Olivi, Barnaba Oriani, Francesco Pezzi, Carlo (in religione Ermenegildo) Pini, Andrea Savaresi, Giovanni Trembley e Abramo Gottlob Werner.

(2) Così si legge nella copia manoscritta della lettera 21 marzo 1794, e così dev'essere. Nel *Nuovo Cimento* si stampò *del* in luogo di *dal*.

(3) Nella *Collezione* dell'Antinori questa *poscritta* fu dapprima omessa, come *estranea alla materia* trattata nella lettera, e pubblicata poi separatamente nel t. III, p. 381-382.

sime esperienze sopra la teoria della evaporazione. Il Professor Vassalli aveva in pronto altra lettera del signor Volta sopra lo stesso argomento della elettricità muscolare, ma per mancanza di tempo se ne rimandò la lettura ad altra adunanza „. Era senza dubbio la lettera del 20 dicembre 1795. Come s'è detto, copia delle due lettere è tuttora nella nostra biblioteca. La battaglia di Montenotte e l'armistizio di Cherasco dovettero far dimenticare al Vassalli e agli altri accademici che una di esse doveva ancora esser letta in seduta. Certo i verbali non ne fanno più cenno.

5. — Resta a dire delle sei lettere originali provenienti dalla Libreria antiquaria De Marinis. La prima, del 20 agosto 1814, è diretta a persona a me ignota, a cui il Volta dà il nome di *amico*: probabilmente a qualche scienziato toscano o dimorante in Toscana, che anche a nome di Vincenzo Antinori aveva espresso il desiderio d'avere *un elenco compito* degli *opuscoli* e delle *dissertazioni* voltiane *sparse qua e là ne' giornali sì esteri che italiani*. La domanda era stata fatta con lettera del 9 agosto, che potrebbe forse esser rintracciata nel così detto Cartellario Voltiano: nel qual caso si avrebbe anche il nome del destinatario della lettera, della quale do qui il testo e che è prova stupenda di modestia non scompagnata dalla coscienza del proprio valore:

Amico Carissimo e Padrone Stimatissimo,

Gratissima mi è stata la di Lei lettera de' 9 corrente recatami dal Signor Busti, colla quale ho ricevuto notizie di Lei da Lei medesima, giacchè, desideroso di averne, le ho non di rado ricercate ai comuni amici o conoscenti, con cui m'incontrava. Molto riconoscente le sono per la memoria che conserva di me, e pel conto in cui tiene le picciole cose da me fatte e gli scritti pubblicati intorno a ricerche e scoperte fisiche. Riguardo al desiderio, ch'Ella e l'egregio Sig. Cavaliere Vincenzo Antinori mostrano, di avere cioè un elenco compìto di tali miei opuscoli e dissertazioni sparse qua e là ne' Giornali sì esteri che italiani, ecc., non saprei come meglio soddisfarvi, che coll'indicare l'opera ultimamente pubblicata a Pavia dal mio Successore nella cattedra di Fisica sperimentale, il Professore Configliacchi, sull'*Identità del fluido elettrico col così detto fluido Galvanico vittoriosamente dimostrata ecc.* In fine a questo libro trovasi un *Catalogo delle Opere state pubblicate dal Volta sino a tutto l'anno 1813*. Il compilatore, che si è data la pena di rin-

tracciarle, ne avea tralasciate alcune, che gli suggerij in appresso, onde fece una picciola aggiunta, che si è posta in calce a molti esemplari dell'opera. Se non era il Configliacchi tanto paziente in pescare qua e là da' Giornali e Collezioni Academiche le varie mie memorie, lettere, dissertazioni, difficilmente ne sarei io venuto a capo, non avendo che di poche copia stampata o manoscritta presso di me, e di alcune non ricordandomi più, o di averle scritte o cosa contenessero. Del resto alcune, massime di vecchia data, sono così poco interessanti, e contengono cose al dì d'oggi troppo conosciute e rese triviali, che non meritano per niun conto di essere riguardate. A dir vero nessuna lo merita molto; ma pure ve n'ha, che presentano qualche novità o scoperta, e ciò può bastare.

Godo di quest'occasione per rinnovarLe le proteste della distinta stima ed amicizia, con cui mi pregio d'essere

Milano, li 20 agosto 1814.

Suo Div.mo Obb.mo Servitore e Amico
C.te Alessandro Volta (1).

Vincenzo o, com'egli scriveva, Vincenzio Antinori, ricordato nella lettera, si fece due anni dopo editore della prima raccolta delle opere del Volta (2), del quale scrisse poi la necrologia. Nato a Firenze nel 1794 (3) da famiglia nobile e ricca, egli " coltivò la fisica e la matematica per genio naturale, aiutato dai casi della vita e dalle relazioni cogli uomini del suo tempo „ (4), e specialmente con il fisico Leopoldo Nobili, esule da Modena in conseguenza della rivoluzione del 1831. Oltre che del Volta, scrisse di Vittorino da Feltre e di Galileo e del Nobili e di altri illustri; ma non meno, e forse più che non i

---

(1) La lettera occupa due pagine intiere. La seconda carta, nella quale doveva trovarsi l'indirizzo, manca.

(2) *Collezione delle opere del Cav. Conte Alessandro Volta*, Firenze, Piatti, 1816, tomi 3 in 5 parti. Sulle manchevolezze di quest'edizione si veda quanto è detto nella prefazione al primo volume dell'*Edizione Nazionale*, e anche quanto scrisse il Volta nella lettera del 26 dicembre 1817 pubblicata qui appresso.

(3) La data del 1794 si trova nella citata prefazione al primo volume dell'*Edizione Nazionale*. Il *Dizionario* del Garollo (alla v. *Nobili*) indica come anno di nascita il 1792: l'Oettinger dichiara che l'anno di nascita è sconosciuto.

(4) Sono parole del Tabarrini nell'introduzione alla raccolta, che citerò, degli *Scritti editi ed inediti* dell'Antinori.

suoi elogi e le sue necrologie di questi grandi, meritano d'esser lette le pagine commoventi dedicate alla memoria d'un vecchio servo di casa Antinori, Simone Bianchini. Codeste pagine, che hanno per motto l'ammonimento del *Liber Ecclesiastici*, “ *servus sensatus sit tibi dilectus quasi anima tua* „, sono come uno spiraglio aperto su quel *piccolo mondo antico*, che giova conoscere anche nei punti luminosi e non nelle sole brutture, e illustrano la figura del padrone non meno che quella del servo. L'Antinori fu per molti anni benemerito direttore dell'*Imperiale e Reale Museo di Fisica e Storia naturale di Firenze.* Devoto alla famiglia regnante, dedicò la collezione delle opere del Volta al Granduca Ferdinando III; fu intermediario fra Leopoldo II e parecchi scienziati, fra i quali Giovanni Battista Amici (1); e nei primi mesi del 1849 dovette tenere attiva corrispondenza con la famiglia e con la corte granducale rifugiata a Napoli (2). Dopo la sua morte, avvenuta il 22 luglio 1865, i figli provvidero

---

(1) Ho due lettere dell'Amici all'Antinori, molto interessanti, dell'11 gennaio e del 22 ottobre 1831. In quest'ultima lettera l'Amici risponde appunto all'invito (che in seguito accolse), fattogli dal Granduca per mezzo dell'Antinori, di recarsi da Modena a Firenze per dirigervi l'Osservatorio astronomico. Si veda anche, qui appresso, la lettera dell'Antinori al Volta in data 27 luglio 1823.

(2) Ciò risulta da una lettera da me posseduta, che l'Antinori scrisse da Firenze il 29 aprile 1849 al cav. Matteo Bittheuser, *segretario intimo* del Granduca. L'Antinori dà anche dei consigli di politica. Scrive: “ Quella popolazione (*di Livorno, causa delle nostre prime sventure*) non merita alcun riguardo ormai, e sebbene degnissima *dei Croati*, pure non gli oso desiderare per la mala impressione ch'essi farebbero sul rimanente dei Toscani, che non gli meritano certo, ed in particolare i Fiorentini! Ma una forza ci vuole, e senza di essa non consiglierei S. A. di ritornare. Questa forza sarà bene che venga presto, come sarebbe pur bene che il Gran Duca non indugiasse molto a ritornare a chi lo desidera, per dar maggior coraggio e fervore ai *buoni*, ed impedire ai malvagi di raffreddare l'entusiasmo „. Escludendo *i Croati*, l'Antinori pensava probabilmente all'intervento piemontese, che sarebbestato grave errore politico per il Piemonte. Andarono invece gli Austriaci, e fu errore anche più grave per la dinastia dei Lorena. Le gesta dei *Livornesi* e la reazione dei *Fiorentini*, specie nell'11 aprile del 1849, sono ben conosciute. Chi non se ne rammentasse, potrebbe vedere, per esempio, le *Memorie inedite di* Giuseppe Giusti, 2ª ediz., Milano, Treves, 1890, pag. 159 e segg., e la nota dell'editore, Ferdinando Martini, a pag. 306 e segg.

a far pubblicare una scelta di suoi *Scritti editi ed inediti*. L'edizione fu curata da Marco Tabarrini, che vi premise una breve introduzione, e comparve, in un volume, a Firenze, dal Barbèra, nel 1868. Più tardi il carteggio dell'Antinori fu, non so come, alienato, e varii pregevoli autografi entrarono così in commercio.

Nel Cartellario Voltiano si conservano cinque lettere dell'Antinori al Volta, delle quali ebbi copia per squisita cortesia del collega Somigliana. Cinque sono parimenti le lettere del Volta all'Antinori da me possedute, ma andarono distrutte, o sono tuttora nascoste parecchie lettere così dell'uno come dell'altro corrispondente.

La prima lettera conservataci è la seguente dell'Antinori:

Celebratissimo Signor Professore,

Non avrei per certo ardito indirizzarle questa mia, quando la principale cagione dell'incomodo, che io sono per recarle, Ella medesima non fosse; ponendo tanta novità e chiarezza, e tanto interesse nelle di lei opere, che leggendo la prima di queste, non si può non essere trasportati da un vivo desiderio di leggere ancora le altre, tanto sono elleno mirabilmente concatenate fra di loro! Ma chi mai crederebbe che opere di un tal pregio dovessero essere così poco conosciute ed intese anco da coloro che scrivono o traducono trattati di Fisica, e che, per la loro rarità, quasi impossibile ne fosse il poterle avere sott'occhio?

Questa rarità appunto, che per vero dire mi sorprende, è la cagione per cui io vengo ad importunarla. Appena ebbi io letta l'aurea sua Dissertazione epistolare latina *De vi attractiva ignis electrici* (nella quale ella ha col suo genio invidiabile sviluppate tante nuove teorie riguardanti l'*Attrazione* e l'*Elettricità Permanente*, e che può giustamente riguardarsi come il fondamento dell'altre sue opere), mi diedi tutta la premura onde possedere, o almeno leggere l'altro di lei Opuscolo, il quale, andando per epoche, succede alla mentovata Dissertazione, intitolato *Novus ac simplicissimus electricorum tentaminum apparatus* ec. ec. Ma con mio gran dispiacere non mi essendo stato possibile poterlo in verun luogo rintracciare, mi truovo necessitato di ricorrere a lei come al fonte, onde ella voglia avere la compiacenza d'indicarmi almeno dove possa essere reperibile questa sua Memoria, la quale sarà certamente interessantissima, poichè porta in fronte l'abbastanza noto e celebre suo nome.

Colla speranza adunque che ella voglia e possa soddisfare a questo mio desiderio, chiudo questa lettera, stimandomi più che compensato

dal mio trasporto per le fisiche discipline, quando questo mi offre l'onore ed il vantaggio di protestarmi, con vera stima e profondo rispetto,

Di lei, Celebratissimo Signor Professore,

Firenze, 4 Aprile 1815.

Dev.^{mo} ed Obbl.^{mo} Servitore
VINCENZIO ANTINORI.

Al Celeberrimo Fisico
Il Sig. Professore Alessandro Volta
Patrizio di Milano.

Il Volta rispose con una lettera del 3 maggio, che non conosciamo, ma che è ricordata nella seguente lettera, nella quale l'Antinori svela il suo progetto di pubblicare una collezione degli scritti Voltiani:

Gentilissimo Signore, Cavaliere e Professore Stimatissimo,

Si direbbe a ragione che poco o nulla io curassi i progressi delle scienze e l'onore della nostra Italia, se, dopo aver lette le di lei memorabili scoperte sparse in differenti Giornali, non mi fosse nato in mente il pensiero di riunirle tutte, e così riunite presentarle al pubblico e facilitarne la lettura; ma questa taccia di non curanza non mi si pertiene per nessun conto, giacchè, appena ebbi letti i primi suoi opuscoli, io concepii il progetto di ristamparli riuniti, e fin da quel punto mi accinsi ad incominciare la Collezione, la quale sarà, nel suo genere, per certo gradita ed ammirata quanto le Collezioni dell'opere del Galileo e del Newton.

Ora che io tengo presso di me tutti i materiali necessari per questa utilissima impresa, vengo con questa mia a farle parte, come è di mio dovere, di un tal mio proponimento, e nel tempo medesimo a pregarla, in primo luogo di volermi accordare con l'innata sua gentilezza un qualche suo scritto inedito, il quale, oltre all'accrescer il pregio dell'opera, sarà da me non solo, ma dal pubblico ancora riguardato come un vero tesoro; e in secondo luogo a voler avere la compiacenza di indicarmi, se le piace l'ordine col quale ho stabilito di presentare alla pubblica luce le di lei memorie. Aveva pensato di dividere tutta la collezione in due volumi, il primo dei quali contenesse la dissertazione *De vi attractiva ignis electrici*; l'opuscolo intitolato *Novus ac simplicissimus electricorum tentaminum apparatus, etc.* (supplirà a questo, non mi essendo stato possibile ritrovarlo nel suo intiero (1), il paragrafo di quella lettera, che ella fece l'onore di scrivermi il 3 maggio dell'anno presente); *le lettere sull'Elettroforo perpetuo*; le osservazioni *Sulla ca-*

(1) L'Antinori venne in seguito in possesso dell'opuscolo desiderato, che è riprodotto nella *Collezione*, t. I, p. I, pagg. 63-101.

pacità dei Conduttori Elettrici, e sulla commozione, che anche un semplice conduttore è atto a dare uguale a quello della boccia di Leyden; la *Memoria sopra il Condensatore* estratta dalle *Transazioni, etc.*; le undici lettere sulla Meteorologia Elettrica, con più le *Osservazioni sull'elettricità dei vapori dell'acqua e del ghiaccio*; la *Memoria della maniera di far servire l'Elettrometro atmosferico portatile all'uso d'un Igrometro sensibilissimo, etc.*, e tutto ciò che ella ha scritto sull'Eudiometro, sulla Pistola Elettrica e sulla Lucerna Elettrica. Nel secondo tomo poi si conterranno tutte le sue Memorie sull'Elettricità animale. Escludo, come ella vede, da questa Collezione le *Lettere sull'aria infiammabile*, perchè queste sono estranee all'Elettricità, riserbandomi a porvi ancor queste quando ella lo creda opportuno (1). Penso di far precedere alli Opuscoli contenuti nel primo tomo una prefazione, la quale presenti la storia dell'Elettricità già vindice, ed esponga l'opinione del Padre Beccaria; a quelli contenuti nel secondo un'altra prefazione, che dia notizia dei primi fenomeni del Galvanismo, che parli della sua celebre pila, di tutto ciò che è stato ritrovato in appresso per mezzo di questa sua celebratissima invenzione. Sarebbe stato troppo ardire se avessi aggiunto alle chiarissime di lei opere qualche cosa di mio. Queste prefazioni saranno scritte da due Professori di questa città.

Eccole posto sott'occhio l'ordine, col quale aveva immaginato di pubblicare le belle sue osservazioni e scoperte. Aspetto adesso il suo parere sopra di ciò, pregandola a volermi dire sinceramente ciò che le piace, ciò che non le piace, poichè io sarò sempre pronto a eseguire secondo che da lei mi verrà indicato.

Insisto nuovamente sopra l'ottenere un qualche suo scritto inedito, e perchè conosco quanto sarebbe universalmente gradito ed ammirato, e perchè in più luoghi delle sue opere ella confessa di avere in pronto dei materiali per nuove memorie, le quali non hanno ancora veduta la pubblica luce, e che la potrebbero vedere in questa occasione.

Godo intanto che la presente occasione mi offra nuovamente l'onore di sottoscrivermi con sincera e profonda stima,

Di Lei Gent.mo Signore Cav.re Professor Stim.mo

Firenze, 11 luglio 1815.

Dev.mo ed Obbl.mo Servitore

VINCENZIO ANTINORI.

Il Volta rispose con la seguente lettera, nella quale esprime il suo compiacimento per l'edizione progettata:

---

(1) Le *Lettere* sono infatti riprodotte nel tomo III della *Collezione*, pag. 4 e segg. Cfr. qui appresso la lettera del Volta del 24 luglio 1815.

Onoratissimo Signore, Signor Colendissimo,

A Como mia patria, ove passo regolarmente ogni anno buona parte dell'estate e dell'autunno, ricevetti pochi giorni sono la graditissima sua degli 11 corrente, in risposta della quale le dico che ho per somma grazia ed onore ch'Ella voglia darsi la pena di raccogliere e pubblicare varj miei opuscoli qua e là sparsi, e forse poco conosciuti, sull'elettricità sì naturale che artificiale e sul così detto Galvanismo, coll'aggiunta di prefazioni, ecc. Spiacemi soltanto che le manchi il *Novus ac simplicissimus electricorum tentaminum apparatus,* ecc.: io ne ho pur rinvenuto qualche esemplare, ma non truovo occasione di mandarglielo, e il mezzo della posta sarebbe forse troppo dispendioso, sebbene il libro sia poco voluminoso, cioè di sole 38 pagine in picciolo quarto. Ella dunque mi dirà cosa debbo fare. Riguardo alle *lettere sulla meteorologia elettrica,* non so se l'ultima che scrissi *sulla periodicità de' temporali* e la formazione della grandine sia stata pubblicata, e in quale raccolta, tranne una Memoria appunto sulla grandine, che fu inserita nel 1° volume delle Memorie dell'Instituto Italiano. Questo è quanto mi suggerisce di dirle per ora riguardo alle mie Memorie elettriche e meteorologiche.

Riguardo a quelle sulle *Arie fattizie,* non pensando Ella di pubblicarle per ora, tralascio di parlarne, sebbene abbiano qualche connessione coi fenomeni elettrico-meteorologici. Infine io ho scritte e lette in varie adunanze letterarie delle Memorie sopra questi ed altri argomenti analoghi, che non sono state pubblicate, le quali Memorie manoscritte non saprei neppure rintracciare fra i miei scartafacci; ma ne farò ricerca, e rinvenendole ne darò a V. S. Ill.ma contezza. Intanto io non ho che a ringraziarla di tutto ciò che fa tendente ad onorarmi. Con questi sentimenti, uniti ad una particolare stima, ho il piacere di riaffermarmi

Como, li 24 luglio 1815.

Suo Divotissimo Obbligatissimo Servitore
C.te Alessandro Volta (1).

Nella speranza di ricevere dal Volta qualche scritto inedito, secondo la promessa contenuta in questa lettera, l'Antinori ne scrisse al Volta parecchie, che non conosciamo e che sono ricordate nella seguente del 12 ottobre 1816:

---

(1) Lettera di due pagine. Manca la carta, che doveva contenere l'indirizzo.

Celebratissimo Signor Conte,

Saranno oggi mai venti giorni che io ebbi l'onore di indirizzarle una mia lettera per mezzo del Signor Cav.re Prof.re Brunacci, il quale si portava a Milano; ma non avendo avuto nessun riscontro di quella, come pure di alcune altre lettere che per diversi mezzi io le ho fatto recapitare, torno nuovamente ad importunarla per ottener da lei qualche cosa d'inedito, così come Ella mi fece sperare colla sua veneratissima de' 24 luglio dell'anno passato. E tanto più fervidamente sono a pregarla con questa mia in quanto che l'edizione è talmente avanzata che, non ricevendo io sollecitamente ciò che Ella è per favorirmi, forse non sarei in tempo di far parte al pubblico di quelle sue apprezzatissime produzioni, lo che sarebbe per me di grave rincrescimento. Quando per altro in risposta a questa Ella mi assicuri di poter ottenere ciò che vivamente desidero, potrò rimediare facendo sospendere per alcun poco la stampa.

Ella riceverà, per mezzo dei Sig.ri Conte Alari e Razzoli pittor Fiorentino, la prima e seconda parte del tomo primo delle di Lei Opere, unitamente alla parte prima del secondo tomo. Questo non sarà prima della fine del presente mese, giacchè quei Signori non lasciano la Toscana prima di detto tempo.

Desideroso adunque che Ella voglia e possa soddisfare a queste mie brame, che sono pure quelle del pubblico, passo colla più alta considerazione e stima a dichiararmi

Di Lei, Celebratissimo Signor Conte,

Dev.mo ed Ob.mo Servo

Firenze, 12 ottobre 1816. VINCENZIO ANTINORI.

Il Volta finalmente rispose, con una lettera, che ha la data del 15 agosto 1816; data senza dubbio falsa per uno di quei casi di distrazione o d'amnesia, che sono più frequenti di quanto si suol credere. La lettera non può infatti esser anteriore al 15 ottobre, poichè il Volta si scusa di rispondere con ritardo ad una lettera dell'8 settembre recapitatagli circa un mese prima dal noto matematico Vincenzo Brunacci, professore a Pavia; e la data dell'8 settembre è confermata da quanto si legge nella lettera dell'Antinori già riferita.

Scrive il Volta:

Illustrissimo Signore, Signor Padrone Colendissimo,

Ricevetti la graditissima sua degli 8 settembre per mezzo del Signor Cavaliere Professore Brunacci circa un mese fa, e per la via

della posta, nel medesimo giorno, l'altra scrittami più d'un mese prima. Tardi le riscontro, avendo impiegato questo tempo a far ricerca fralle mie vecchie carte mal ordinate, anzi confusissime e molto mancanti (a cagione massimamente de' miei frequenti trasporti e cangiamenti di domicilio da Como a Milano e a Pavia) degli scritti, di cui V. S. Ill.ma mi fa ricerca; de' quali non mi è peranco riuscito di trovare nè alcun esemplare stampato, nè copia manoscritta. Mi cadde bensì sott'occhio tempo fa quel picciolo *Estratto d'una lettera relativa alla Memoria del Chimico Signor Porati sulla possibilità d'un'accensione spontanea*; ma ora non la [!] rinvengo più. L'altra operetta intitolata *Proposizioni e sperienze di aerologia, ecc.*, 1776, non m'è riuscito di rintracciarla nè stampata nè manoscritta; una copia però stampata deve esistere nelle mani del mio Collega Professore Configliacchi, ma egli si truova di presente in viaggio nella Germania, e non sarà di ritorno a Pavia che in dicembre. Dalla massa poi confusa dei manoscritti, che mi sono restati, non saprei cosa scegliere, che non sia già stato stampato e che meriti d'esserlo: forse un'ultima lettera sulla *Meteorologia elettrica*; ma non lo so bene, ignorando fin dove arrivino le già pubblicate. Dei Discorsi da me recitati in occasione di promozioni alle lauree, qualcuno forse potrebbe passare; ma non credo che convenga inserirli nella raccolta delle altre mie Memorie, ch'Ella sta ordinando. Varie anche di queste divenute al dì d'oggi poco o nulla interessanti, se pur lo furono al suo tempo, qual figura mai faranno agl'occhi di coloro, che non sanno o non vogliono riportarsi ai tempi in cui furono scritte, all'epoca cioè delle prime scoperte? Comunque sia, io rimetto tutto al saggio di lei discernimento, e la prego solo di voler usare d'ogni libertà in correggere le espressioni e lo stile, ove sien difettosi, al che poco ho avuto io riguardo, oltre gli errori di stampa incorsi senza mia colpa.

Or quando verrà alla luce cotal collezione delle mie operette sì svariate e informi? Io mi lusingo ch'Ella saprà in qualche modo connetterle, o riempierne le lacune, e scusarne le imperfezioni, correggerne gli errori ecc. con apposite note. Per finirla, io m'abbandono in tutto e per tutto nelle di lei mani; e ringraziandola vivamente delle cure che si prende a mio vantaggio, con piena stima e ossequio mi riprotesto

Di V. S. Ill.ma

Como, li 15 agosto 1816.

Div.mo Obbl.mo Servitore
C.te Alessandro Volta (1).

(1) Anche questa lettera è di due pagine e manca della seconda carta, e quindi dell'indirizzo.

Dopo questa lettera, la quale, come ho detto, è probabilmente del 15 ottobre, dovremmo averne almeno due dell'Antinori, l'ultima delle quali del 10 gennaio 1817; ma esse, a quanto pare, non giunsero fino a noi. Rispose il Volta il 27 febbraio, ripetendo che nulla aveva potuto trovare d'inedito da aggiungere alla collezione delle sue opere:

Ill.^{mo} Signore, Signor Padrone Colendissimo,

Pavia, 27 febbraio 1817.

Accuso la mia pigrizia nel riscontrare i di lei graditissimi fogli, l'ultimo de' quali, datato 10 gennajo, mi giunse sol pochi giorni sono, trasmessomi da Como a Pavia, ove passo gran parte dell'anno a cagione degli studj de' miei due figli all'Università. Altra scusa poi devo farle per non aver potuto rintracciare alcun'altro de' miei scritti giacenti quà e là dispersi, a Como, a Milano e qui a Pavia, a cagione dei frequenti viaggi e trasporti di me e della famiglia, e molto più del poco ordine in cui tengo le mie cose. Fra questi scritti, che avrei potuto mandare a V. S. Ill.^{ma} per essere unito [!] agli altri ed inserito [!] nella Collezione, che sta pubblicando, v'è una lunga lettera in continuazione di quelle sulla Meteorologia elettrica, che ha per soggetto il ritorno periodico dei temporali; ma questo scritto era già passato nelle mani dei Professori Brugnatelli e Configliacchi, i quali vengono ora d'inserirlo nel Giornale appunto di Brugnatelli.

La prego di scusare queste ed altre mie mancanze, e desideroso di veder uscita alla luce la Collezione da Lei intrapresa delle indicate mie operette, con sentimenti di vera riconoscenza e stima ossequiosa mi pregio protestarmi

Di V. S. Ill.^{ma}

Div.^{mo} Obbl.^{mo} Servitore
C.^{te} ALESSANDRO VOLTA.

All'Ill.^{mo} Signore Signor Padrone Colendissimo
Il Signor Vincenzo Antinori.
Firenze (1).

A questa lettera non occorreva far risposta; e l'Antinori non scrisse infatti se non quando potè annunciare al Volta che la stampa delle sue opere era compiuta e che glie ne aveva

(1) Il testo della lettera occupa due pagine. Nella quarta pagina è l'indirizzo con sigla e bollo postale, in cui si legge la data 5 *marzo*.

mandato qualche copia. Essendo la lettera dell'Antinori del 28 agosto 1817, è chiaro che la stampa della Collezione fu ultimata solo nella seconda metà di quell'anno, benchè tutti i volumi portino la data del 1816. Ecco il testo della lettera:

Meritissimo Signor Conte,

Essendo finalmente venuta al suo compimento la Collezione delle pregiatissime sue Opere, io mi faccio un dovere di inviargliene un saggio, che io le rimetto per lo spedizioniere diretto al Signor Prof. Tosoni in Milano, non sapendo se Ella si trovi in codesta Città ovvero a Como. Mi lusingo che Ella le riceverà con quello stesso piacere col quale un padre vedrebbe ritornare a sè, riuniti in famiglia, i figli che per vari accidenti fossero stati finora tra loro separati e disgiunti.

Prima di tutto fa d'uopo che io mi accusi di aver mancato, tralasciando di rispondere alla sua gentilissima de' 27 febbraio, nella quale Ella mi dava conto della pubblicazione nel Giornale del Sig. Brugnatelli della sua lettera sulla periodicità dei temporali; la qual lettera ho avuta in tempo da poterla inserire nella Collezione insieme colla nota del Signor Prof. Configliacchi, che mi sembra avvalorare le sue belle osservazioni e scoperte. È vero, ho mancato; ma poichè doveva nella mia risposta indicarle l'epoca della pubblicazione delle sue Opere, il che non poteva fare dipendendo il ritardo dall'incisione e non da me, ho stimato meglio starmi in silenzio di quello che azzardare una cosa, la quale derivava tutta dall'arbitrio d'un altro. Quel che ha dunque ritardato la detta pubblicazione è stata appunto l'incisione del suo ritratto, la quale, come vedrà, è stata eseguita dal celebre Signor Morghen; ma si poteva perdonare una tal dilazione per veder poi inciso dal primo bulinista il primo fisico dell'Italia (1).

Ella troverà queste sue Memorie divise in tre tomi, ciascun dei quali è preceduto da una prefazione. Io aveva fatto proponimento, come già le scrissi, di non porre nulla di mio in questa preziosa raccolta, conoscendomene incapace; ma come resistere? Aveva letto per ordine tutte le sue Opere; esse mi avevano naturalmente destato dei sentimenti di ammirazione per l'Autore; questi sentimenti ho voluto esternarli; e dato bando al proponimento, ho scritto la seconda prefazione (2), la quale

---

(1) Il ritratto, appena mediocre, premesso alla *Collezione* fu infatti inciso dal Morghen, su disegno dell'Ermini tratto da un originale del Sabatelli.

(2) Questa prefazione, firmata con le iniziali *V. A.*, è nel t. II della *Collezione*, p. I, pagg. III-XXVI.

altro non è che un'eco della rispettabil sua voce. Essa dalla prima pretesa scoperta del Galvani espone in breve i di lei lavori fino all'invenzione della pila, e presenta così il mirabil filo ed andamento delle idee e dei fatti, da cui Ella fu guidato a quella celebre scoperta; il quale andamento non mi pare che fosse noto abbastanza, e che esposto in succinto mi sembra che debba essere utile alla maggior parte dei fisici. La prego a volermi perdonare una tal arditezza, ed a volersi degnare di dare un'occhiata a questo mio scritto, comunque siasi. Io mi stimerò ben fortunato se Ella, colla natural sua candidezza, vorrà indicarmi ciò che le spiace e ciò che la soddisfa.

Mi rincresce che questa Collezione non possa dirsi totalmente completa. Ella è mancante di due opuscoli: di quello *Sulla possibilità di un'accensione spontanea*, e dell'altro intitolato *Proposizioni ed esperienze d'aerologia*, ecc.; ma ciò non è per mia colpa. Io ho avuto ricorso all'Autore stesso, come si ricorderà, e Ella non ha potuto soddisfarmi. Comunque sia, il mondo letterario è persuaso che la scienza abbia fatto con questa raccolta un importante e reale acquisto.

Serva una tal impresa a meritarmi la riconoscenza dei fisici, e possa dimostrarle evidentemente in qual conto tenga la Toscana le immortali sue opere e quel genio di sperimentare, che la distingue e che ci rammenta i tempi felici dell'Accademia del Cimento.

Ho l'onore di essere colla più alta considerazione

Di Lei, Meritissimo Signor Conte,

Firenze, 28 agosto 1817.

Dev.mo ed Obbl.mo Servitore
VINCENZIO ANTINORI.

Tardando il Volta a rispondere, l'Antinori gli scrisse il 12 dicembre una lettera, che non abbiamo. Ci giunse invece la lettera di risposta del 26 dicembre, nella quale il Volta accenna in modo cortese agli errori di stampa, che aveva trovato nell'edizione fiorentina:

Ill.mo Signore, Padrone Colendissimo,

Ricevetti dopo qualche tempo le coppie, che V. S. Ill.ma si è compiaciuta trasmettermi, delle mie operette, per mezzo del Signor Professore Tosoni, che incumbenzai di ringraziarla a mio nome. Era veramente mio debito che ciò facessi io direttamente; ma la pigrizia grande e ogni giorno più crescente, che mi domina, mi trattiene molto dallo scrivere, massime poi lettere. La prego pertanto a volermi avere per iscusato questa volta, e se accadrà, qualche altra. Ciò in risposta alla sua de' 12 cadente dicembre, ringraziandola e del regalo di dette copie e dell'onore

fattomi coll'essersi Ella assunto l'impegno di raccogliere e pubblicare quelle mie opericciuole. L'edizione è bella, e viene giustamente lodata. Io invero vi ho trovati varj errori di stampa, alcuni de' quali guastano affatto il senso: altri s'incontravano già ne' Giornali, in cui quelle mie Memorie furono dapprima inserite, altri vi vengono nuovamente aggiunti; ma pazienza; prevale il bene al male, ed io le son sempre molto tenuto dell'impegno e delle pene, che V. S. Ill.^{ma} si è prese. Gradisca pertanto i miei ringraziamenti uniti ai sensi di ossequiosa stima, con cui mi raffermo, facendole augurj di felicità per l'anno prossimo e gli altri a venire,

Di V. S. Ill.^{ma} e Stim.^{ma}

Pavia, li 26 dicembre 1817.

Div.^{mo} Obbl.^{mo} Servitore
C.^{te} Alessandro Volta (1).

Abbiamo ancora una lettera dell'Antinori al Volta posteriore di più che sei anni alla precedente. La Gazzetta di Genova aveva pubblicato uno scritto del Volta, o ispirato dal Volta, sopra i paragrandini. L'Antinori gli scrisse congratulandosi e rammentandogli nel medesimo tempo la promessa, che aveva fatta, di riunire e mandare a lui *tutti i suoi lavori scientifici, come abbozzi, studi, pensieri e frammenti*, coi quali si sarebbe formato un volume d'aggiunte alla collezione già pubblicata. Sollecitava dunque una risposta, specialmente per ciò che riguardava i manoscritti, affermando che sarebbe stata gratissima anche all'arciduca Leopoldo (il futuro Leopoldo II), e suggeriva al Volta, che aveva ormai sorpassati i settantott'anni, di valersi per rispondere della mano d'un figlio o di qualunque altra persona. La risposta fu fatta circa un mese dopo, il 31 agosto 1823, e vi è per l'appunto autografa la sola firma tracciata in grossi caratteri, quasi lasciando pesare la mano sulla penna in luogo di reggerla. Il Volta non si rammentava affatto della promessa e non aveva riordinato i suoi manoscritti. Qualche aggiunta alla Collezione si sarebbe tuttavia potuto fare, poichè il Configliacchi era disposto a mandare i pochi opuscoli già stampati, che l'Antinori non aveva potuto rinvenire. Come è noto, il volume d'aggiunte non fu pubblicato.

(1) Lettera di due pagine. Manca la seconda carta, che doveva contenere l'indirizzo.

Ecco ora il testo delle due lettere, con le quali chiudo questo mio piccolo contributo alle onoranze per il centenario del Volta e, ciò che più conta, all'Edizione Nazionale delle sue opere:

Meritissimo Signore,

Molti motivi di consolazione mi ha offerti la sua lettera contro i paragrandini pubblicata nella Gazzetta di Genova: in primo luogo, lo stato di sua salute, che rilevo migliore assai di quello che mi veniva supposto; in secondo luogo, il suo voto valevolissimo, che ho riscontrato consentaneo al debole mio parere, intorno alla utilità di una pretesa scoperta, alla quale è stato dato maggior rilievo di quello che ella merita, e su di cui mi trovo costretto a dire qualche cosa ancor io per commissione della nostra I. e R. Accademia de' Georgofili. Ella sia certo che io darò al suo voto tutto il peso che merita, e le sarò molto tenuto se vorrà indicarmi qualche altra cosa relativa allo stesso argomento, onde arricchire la mia relazione con qualche sua idea, e renderla così più degna di quel rispettabile consesso di dotti.

Io mi sovvengo che ella ebbe, è già qualche tempo, la compiacenza di farmi sapere per mezzo di un viaggiatore svizzero, di cui non mi sovvengo il cognome, che ella avrebbe riuniti tutti i suoi lavori scientifici, come abbozzi, studi, pensieri e frammenti, ecc., onde inviarmeli. Ricevei questa notizia, come può credere, con moltissimo piacere, e sono sempre stato e sto sempre attendendo l'adempimento di questa promessa, bramoso di possedere codesto tesoro, e volonteroso di farne poi parte al pubblico con un tomo di aggiunta alla Collezione delle sue opere, persuaso che anco i pensieri, i dubbi, i quesiti, i tentativi ecc., di un uomo d'ingegno valgono mirabilmente a fare progredire una scienza.

Io non voglio abusare più a lungo della di lei bontà; solo la prego a volermi consolare con una sua risposta, specialmente per ciò che riguarda i suoi manoscritti; la quale, quando a lei riesca d'incomodo, potrà farmi trascrivere da un suo figlio o da chi più le piacerà, sicuro di far cosa utile alla scienza e gratissima a me non solo, ma ancora a S. A. l'Arciduca Leopoldo, nostro Principe Ereditario, presso di cui mi trovo occupato nella illustrazione dei manoscritti del Galileo e degli Accademici del Cimento; il quale ha di lei quella stima, che se gli deve da tutti i conoscitori delle fisiche discipline.

Mi creda invariabilmente con profonda stima, quale mi pregio di segnarmi,

Di Lei, Preg.mo Signor Cavaliere,

Firenze, 27 luglio 1823.

Dev.mo ed Obbl.mo Servo
VINCENZIO ANTINORI.

Pregiatissimo Signor Cavaliere,

Ho ricevuto la di lei gentilissima, e le sono infinitamente tenuto dell'interesse che prende alla mia salute, e del troppo conto che ha fatto d'una lettera sui paragrandini, ch'Ella credette da me composta, mentre in realtà non fu che assentita e non punto destinata alle stampe, cui fu data senza mia cognizione.

Riguardo a' miei manoscritti, non sovvenendomi io della promessa da lei accennata, non mi sono occupato a riordinarli, non trovandosi in essi alcun'opera compita ed alquanto estesa. Ma poichè Ella desidera di far qualche aggiunta alla Collezione delle mie opere, può dirigersi al Prof. Configliachi di Pavia, che s'incarica di farle tenere que' pochi miei opuscoli già stampati, ch'Ella non ha potuto rinvenire; in tal occasione unirò a quegli scritti la memoria del Dottor Bondioli sulle aurore boreali, alla quale trovasi una mia risposta nella detta Collezione.

Sensibilissimo alla troppo favorevole opinione che ha di me S. A. il Principe ereditario di Toscana, vedo con sommo piacere che l'A. S. si occupa delle esatte scienze, seguendo l'illustre esempio degli altri Principi di Toscana, che ne furono i Mecenati. Godo pure sommamente ch'Ella attenda ad illustrare i preziosi manoscritti del Galileo e degli Accademici del Cimento, manoscritti che trovar non poteano interprete migliore.

Ho il vantaggio di rassegnarmi con profonda stima

Di Lei, Pregiatissimo Signor Cavaliere,

Como, li 31 agosto 1823.

Umilissimo Divotissimo Obbligatissimo Servitore
C.te ALESSANDRO VOLTA (1).

(1) Testo della lettera in due pagine. Manca la seconda carta.

Gli Accademici Segretari:
ORESTE MATTIROLO
GIOVANNI VIDARI

INDICE

DEL VOLUME LXII.